

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

37. Band, Heft 1/3

1. April 1951

S. 1—144

Geschichte.

● **Perrier, Georges:** *Wie der Mensch die Erde gemessen und gewogen hat. Kurze Geschichte der Geodäsie.* Bamberg: Bamberger Verlagshaus Meisenbach & Co. 1949. 190 S., 16 Bildtafeln, Ganzleinen DM 6,80.

Durch die von E. Gigas besorgte Übersetzung des 1939 in dem Pariser Verlag Alcan, Presses Universitaires de France, erschienenen Originals hat des Verf. meisterhafte Darstellung der Geschichte der wissenschaftlichen Geodäsie auch in das deutschsprachige Schrifttum Eingang gefunden. Beginnend mit dem 17. Jahrhundert, in dem die Geodäsie erstmalig als selbständige Wissenschaft mit scharf umrissener Problemstellung in Erscheinung tritt, zeigt Verf. in einer überaus lebendigen Schilderung den Weg, auf dem theoretische Forschung und exakte Messung in enger Zusammenarbeit und gegenseitiger Befruchtung zu unserer heutigen Vorstellung von Gestalt und Größe der Erde geführt haben. Der rein mathematisch-geometrische Zweig und die sich auf Schweremessungen gründende physikalisch-dynamische Methode der Geodäsie werden in ihren Grundzügen und wechselseitigen Beziehungen klar herausgearbeitet. Der Leser wird dabei nicht nur mit den großartigen Leistungen der Vergangenheit bekannt gemacht, sondern zugleich in die noch ungelösten Probleme der heutigen Geodäsie eingeführt. Die bemerkenswerte Fähigkeit des Verf., komplizierte theoretische Zusammenhänge allgemeinverständlich und doch wissenschaftlich einwandfrei darzustellen, macht das Buch besonders wertvoll. Es kann daher jedem mathematisch Gebildeten, der sich auf leichte und angenehme Weise mit den Aufgaben der höheren Geodäsie vertraut machen will, sehr empfohlen werden.

W. Hofmann (Bonn).

Schrek, D. J. E.: *Die Konstruktion von Thomas Strode für die mittlere Proportionale zweier Strecken.* Euclides, Groningen 25, 169—172 (1950) [Holländisch].

Bei M. Simon (Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jh., Leipzig 1906, S. 174) wird eine Ähnlichkeitskonstruktion „von E. A. Gouzy“ (1857) zur Bestimmung der mittleren Proportionalen erwähnt, die Verf. auf Strode (1626 ?/88) zurückführt. Er irrt allerdings in der Auffassung, Strodes Autorschaft sei unbekannt: sie wird in J. Tropicke (Geschichte der Elementarmathematik IV², Berlin/Leipzig 1923, S. 159=IV³, 1940, S. 214/15; dies. Zbl. 22, 295) erwähnt. Bei Aufzählung der wissenschaftlichen Arbeiten Strodes fehlt die seit 1673 brieflich oft genannte, jedoch ungedruckt gebliebene Kegelschnittlehre. J. E. Hofmann.

Vera, Francisco: *Les mathématiques à l'école des traducteurs de Tolède.* Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 94—98 (1948).

Loria, Gino: *La storia della matematica vista da un veterano.* Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 165—170 (1950).

Procissi, Angiolo: *Nuove ricerche bibliografiche galileiane.* Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 170—174 (1950).

Dantzig, D. van: *Blaise Pascal und die Bedeutung der mathematischen Denkweise für das Studium der menschlichen Gesellschaft.* Euclides, Groningen 25, 203—232 (1950) [Holländisch].

Dijksterhuis, E. J.: *Descartes, Pascal und der Beweis auf dem Puy-de-Dôme.* Euclides, Groningen 25, 265—270 (1950) [Holländisch].

Bottema, O.: *Dr. H. J. E. Beth. 1880 — 5. Juli — 1950.* Euclides, Groningen 25, 241—252 (1950) [Holländisch].

Tietze, Heinrich: Constantin Carathéodory. — Auszugsweise aus einem ausführlicheren Nachruf. Arch. Math., Karlsruhe 2, 241—245 (1950).

Bowman, F.: William Hunter. J. London math. Soc. 25, 353—354 (1950).

● **Kowalewski, G.:** Bestand und Wandel. München: Verlag R. Oldenbourg 1950. 309 S.

Lesenswerte Autobiographie mit vielen intimen Einzelheiten über zeitgenössische Mathematiker, von denen jedoch nicht alle zuverlässig sind. *J. E. Hofmann.*

Polubarinova-Kočina, P. Ja.: S. V. Kovalevskajas wissenschaftliche Arbeiten. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 229—235 (1950) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Golubev, V. V.: S. V. Kovalevskajas Arbeiten über die Bewegung eines starren Körpers um einen Fixpunkt. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 236—244 (1950) [Russisch].

Evgenij Leopoldovič Nikolaj. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 117—120 (1950) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● **Weyl, Hermann:** Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. 2. unveränd. Aufl. (Handbuch der Philosophie.) München: Leibniz Verlag (bisher R. Oldenbourg Verlag) 1950. 172 S.

● **Kraft, Victor:** Mathematik, Logik und Erfahrung. Wien: Springer-Verlag 1947. VII, 129 S.; DM 8,—.

Eine Schwäche des Buches ist bestimmt durch die zu geringe Kenntnis des Verf. von den Problemstellungen der klassischen Philosophen, insbesondere Kants. Erfahrung wird erst S. 70 näher erläutert, vorher aber zur Beantwortung grundlegender Fragen benützt. Die Grundlagen der Mathematik sind (für den Verf.) aus der Erfahrung genommen, daher die Anwendbarkeit dieser Wissenschaft. Für die Physik: „Naturgesetze werden durch die Erfahrung eindeutig bestimmt“. Der Abschnitt über die Logik scheint noch am besten gelungen. „Logische Sätze sind nicht wahr, sondern die Logik entscheidet erst über die Wahrheit“. Der Verf. ist belesen, doch ist das Buch nicht geeignet für unkritische Leser. *Hoheisel (Köln).*

Mullender, P.: Einfachheit in der Mathematik. Euclides, Groningen 25, 173—186 (1950) [Holländisch].

Bourbaki, Nicholas: The architecture of mathematics. Amer. math. Monthly 57, 221—232 (1950).

Es wird die Frage aufgeworfen, ob die Entwicklung der Mathematik zur Aufsplitterung in immer selbständigere Einzeldisziplinen tendiert oder zur Bildung eines einzigen, zusammenhängenden, gegliederten Organismus. Verf. begründet seine Entscheidung für die zweite Möglichkeit, indem er zeigt, wie die axiomatische Methode durch die Aufstellung weniger allgemeiner Strukturen, so z. B. der Gruppen, der geordneten Mengen, der topologischen Strukturen usw., in der letzten Zeit Begriffe und Methoden geschaffen hat, die sich in gleicher Weise auf die verschiedensten der bisherigen Einzeldisziplinen anwenden lassen. In der Hierarchie dieser Strukturen sieht Verf. das neue Gliederungsprinzip der Mathematik, durch das die Mathematik immer mehr ein einziger zusammenhängender Komplex wird. In dieser neuen Gliederung, die Verf. seinem bekannten Werk „Eléments de mathématique“ zugrunde gelegt hat, verlieren die bisherigen Einzeldisziplinen ihre Selbständigkeit, ihre gegenseitige Verflechtung wird offenkundig. *G. Köthe (Mainz).*

Kalmár, László: Une forme du théorème de Gödel sous des hypothèses minimales. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 963—965 (1949).

A. Chauvin (dies. Zbl. 34, 292) hat die Bedingungen formuliert, unter denen der Beweis von Gödel für seinen Unvollständigkeitssatz für beliebige logische Strukturen nachgebildet werden kann. In der vorliegenden Note zeigt Verf., daß diese Formulierung sich verallgemeinern

läßt. — Verf. sagt, daß ein geordnetes Tripel $[P, D, \alpha]$ eine Theorie ist, genau dann, wenn P, D Mengen sind und α eine Abbildung der Elemente von D in P ist. P heißt Ausdrucksmenge, D Menge der Beweise, und α liefert zu jedem Beweis genau eine Conclusio. Es gibt also jetzt drei Festlegungen des Begriffes einer „Theorie“; nämlich: (1) die vom Ref. (dies. Zbl. 26, 243) eingehend diskutierte, (2) die von Chauvin und (3) die in der vorliegenden Note vom Verf. angebene. Die Definition des Ref. stützt sich auf die Beziehung der Ableitbarkeit eines Ausdrucks aus einer Menge von Ausdrücken, die Chauvins auf die der unmittelbaren Ableitbarkeit eines Ausdruckes aus einer Menge von Ausdrücken, die des Verf. auf die Beziehung: „ H ist Schlußglied eines Beweises“. In der Arbeit des Ref. werden weitere Eigenschaften seiner Ableitbarkeitsbeziehung diskutiert, die tatsächlich allen üblicherweise verwendeten Ableitbarkeitsbeziehungen zukommen. Ohne derartige präzisierende Eigenschaften sind die verwendeten Ableitbarkeitsbeziehungen natürlich viel zu weit gefaßt. (Für die vorliegenden Überlegungen des Verf. ist jedoch eine derartige Präzisierung nicht nötig.) Ref. hat sich überlegt, daß es möglich ist, auch die Chauvinsche und die Kalmársche Ableitbarkeit so festzulegen, daß wieder alle üblicherweise verwendeten Ableitbarkeitsbeziehungen die präzisierten weiteren Bedingungen erfüllen. Es läßt sich dann zeigen, daß alle drei Definitionen des Begriffes einer Theorie gleichwertig sind. Auf Grund dieser Überlegungen scheint die Definition des Ref. den Vorzug zu verdienen; und zwar aus folgenden Gründen: (1) Bei seinem Aufbau wird die Rolle des sog. Endlichkeitssatzes (Wenn ein Ausdruck ableitbar ist, so ist er schon aus einer endlichen Teilmenge ableitbar) besonders klar; bei dem Chauvinschen Ansatz ist dieser Endlichkeitssatz stets beweisbar [vgl. Ref. (dies. Zbl. 28, 101) Satz auf Seite 77], es sei denn, daß man auch transfinite unmittelbare Schlußregeln, also solche zuläßt, bei denen aus unendlich vielen Prämissen geschlossen wird. (2) Die Kalmársche Ableitbarkeitsrelation schließlich ist sicherlich komplizierter als die beiden anderen. — Eine Theorie heißt nach dem Verf. eine Theorie mit „identischen Ungleichungen“ genau dann, wenn es eine Menge F und eine eindeutige Abbildung gibt, durch die jedem geordneten Paar $[f, l]$ aus einem Element f von F und einer natürlichen Zahl l genau ein Element einer Teilmenge P' der Ausdrucksmenge zugeordnet wird. Die Elemente von P' sind also charakterisiert durch das Paar $[f, l]$; sie werden auch mit $f \equiv l$ (f ist nicht identisch gleich l) bezeichnet. Ist weiter jedem Element f von F genau eine arithmetische Funktion einer Variablen zugeordnet, so heißt die betreffende Theorie mit identischen Ungleichungen „interpretiert“. Es ist leicht festzulegen, wann eine natürliche Zahl k ein „Gegenbeispiel“ für eine identische Ungleichung sein soll; ebenso wann eine identische Ungleichung wahr, wann sie falsch heißen soll; ferner wann eine interpretierte Theorie mit identischen Ungleichungen widerspruchsvoll, wann sie unvollständig heißen soll. Ist weiter jedem Funktionsausdruck und jedem Beweis einer Theorie mit identischen Ungleichungen jeweils genau eine natürliche Zahl (0 ausgeschlossen) als Nummer zugeordnet, so kann es vorkommen, daß für eine identische Ungleichung $f \equiv l$ gerade l die zugeordnete Nummer von f ist. In diesem Fall heißt $f \equiv l$ und ebenso jeder seiner Beweise, falls es solche gibt, diagonal; l heißt Index dieses Ausdruckes und ebenso auch Index jedes zugehörigen Beweises. Auf diese Art läßt sich also eine Indexfunktion $\gamma(k)$ festlegen, die als Wert gerade den Index des Beweises mit der Nummer k hat, falls dieser Beweis existiert und diagonal ist, und die in jedem anderen Falle den Wert 0 besitzt. Ist diese Indexfunktion in der betreffenden Theorie mit identischen Ungleichungen durch einen Ausdruck repräsentierbar, so nennt Verf. die Theorie eine Gödelsche Theorie. Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz kann dann folgendermaßen formuliert werden: Eine Gödelsche Theorie ist entweder widerspruchsvoll oder unvollständig. — Die Kalmársche Festlegung des Begriffes einer Gödelschen Theorie ist gegenüber der Chauvinschen allgemeiner. Vor allem macht sie die Chauvinsche Begriffsbildung einer interpretierenden Struktur überflüssig. Sie ordnet vielmehr das Gödelsche Theorem in die Theorie beliebiger allgemeiner (deduktiver) Kalküle ein. K. Schröter (Berlin).

Dienes, Z. P.: On an implication function in many-valued systems of logic. *J. symbolic Logic* 14, 95—97 (1949).

Es ist üblich, gemäß einem Vorschlag von Łukasiewicz und Tarski, die Wahrheitswerte des n -wertigen Aussagenkalküls (AK) durch die Brüche: $0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1$, die Wahrheitswerte des n_0 -wertigen AK durch die Brüche der Form k/l ($0 \leq k \leq l$) zu bezeichnen. Zur Festlegung jedes mehrwertigen AK muß dann noch angegeben werden, welche seiner Wahrheitswerte ausgezeichnete Werte sein sollen. — Łukasiewicz und Tarski wählen in allen Fällen als einzigen ausgezeichneten Wert 1. Außerdem haben sie bisher nur zwei Wahrheitsfunktionen genauer untersucht, nämlich eine einstellige Funktion N , die durch $N(x) = Nx = 1 - x$ festgelegt ist, und eine zweistellige Funktion C , die durch $C(x, y) = Cxy = \min(1, 1 - x + y)$ festgelegt ist. — Verf. untersucht in der vorliegenden Arbeit für mehrwertige AK mit beliebigen ausgezeichneten Werten eine weitere Wahrheitsfunktion C' , die durch

$$C'(x, y) = C'xy = \max(1 - x, y)$$

festgelegt ist. C' kann offenbar mit Hilfe von C und N definiert werden, nämlich $C'xy = CCNxxy$. Das wichtigste Resultat des Verf. ist sein Theorem 4: Jede Identität des zweiwertigen AK in

Implikation und Negation ergibt, falls man die Implikation durch C' und die Negation durch N deutet, bei jeder Belegung der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten eines n -wertigen ($2 \leq n \leq \aleph_0$) AK stets einen Wert $\geq \frac{1}{2}$. Dieser Satz wird bewiesen unter Verwendung der konjunktiven bzw. alternativen Normalformen. Das ist möglich, weil — wie man leicht zeigt — in jedem mehrwertigen AK mit Hilfe von C' und N zwei Wahrheitsfunktionen definiert werden können, für die gerade die Identitäten in der zweiwertigen Konjunktion und Alternativen identisch sind. — Aus dem Theorem des Verf. ergibt sich eine wichtige Folgerung (die der Verf. nicht selbst in dieser Form angibt). Zunächst einmal gilt nämlich sogar ohne Benutzung des Theorems des Verf.: Jede Identität eines mehrwertigen AK in C' und N ist auch eine Identität des zweiwertigen AK in Implikation und Negation; hierbei braucht nur vorausgesetzt zu werden, daß 1 ein ausgezeichneter und 0 ein nicht ausgezeichneter Wahrheitswert ist. Auf Grund des Theorems des Verf. folgt nun auch umgekehrt: Wenn sämtliche Wahrheitswerte, die $\geq \frac{1}{2}$ sind, ausgezeichnete Wahrheitswerte sind, so ist jede Identität des zweiwertigen AK in Implikation und Negation auch eine Identität des betr. mehrwertigen AK in C' und N . — Das Theorem 4a des Verf. ist mißverständlich formuliert; denn in einem Łukasiewicz-Tarskischen AK ist stets (s. o.) 1 der einzige ausgezeichnete Wert. Das Theorem 5 ist sogar nicht korrekt, worauf schon A. Church und N. Rescher in ihrer Besprechung [J. symbolic Logic 15, 69—70 (1950)] hingewiesen haben. Die Folgerung, die Church und Rescher dort weiter ziehen, daß nämlich auf Grund des Resultates des Verf. für jedes n mit $\aleph_0 \geq n \geq 2$ ein System von Wahrheitswerten und Wahrheitsfunktionen angegeben werden kann, in dem dieselben Identitäten erhalten werden können wie im zweiwertigen AK, ist keineswegs von großer Bedeutung. Es kann sogar sehr leicht verallgemeinert werden. Auf Grund der vorliegenden Arbeit müssen nämlich als ausgezeichnete Wahrheitswerte stets alle Werte $\geq \frac{1}{2}$ genommen werden. Es gilt aber sogar der folgende Satz, auf den der Ref. schon früher aufmerksam gemacht hat: Besitzt eine Menge von aussagenlogischen Ausdrücken X eine adäquate Matrix mit κ_1 ausgezeichneten und κ_2 nicht-ausgezeichneten Werten, so besitzt X für jedes $\lambda_1 \geq \kappa_1$ und $\lambda_2 \geq \kappa_2$ auch eine adäquate Matrix mit λ_1 ausgezeichneten und λ_2 nicht-ausgezeichneten Werten. Eine derartige Matrix läßt sich auch in jedem Fall effektiv angeben. Werden die ausgezeichneten Wahrheitswerte durch * charakterisiert, so haben z. B.:

	0	1		0	1	2		0	2	1		0	2	1
0*	0	1	0*	0	1	1	0*	0	0	1	0*	0	2	1
1	0	0	1	0	0	0	2*	0	0	1	2*	0	0	1
			2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	2	0

sämtlich dieselbe Menge der Identitäten, nämlich gerade die der Identitäten in der zweiwertigen Implikation.

K. Schröter (Berlin).

Lévy, Paul: Axiome de Zermelo et nombres transfinis. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 67, 15—49 (1950).

Verf. verfiert den Cantorsche Standpunkt, daß die Elemente einer unendlichen Menge unabhängig von unserem Denken existieren, mögen wir sie benennen („nommer“) können oder nicht. Die Zulässigkeit des Auswahlaxioms kann dann überhaupt nicht Problem werden; denn, wenn eine Menge kraft ihrer Definition existiert, so existieren damit kollektiv auch ihre Elemente und es steht uns das Recht zu, irgendeines von ihnen wie ein Objekt unserer Betrachtung zu behandeln, auch wenn wir kein einziges benennen können [„... de prendre un de ces éléments comme objet de notre raisonnement ... même si nous ne savions en nommer aucun ...“ (S. 23, Zeile 5—6 v. o. und Zeile 5 v. u.)], und nichts hindert uns, von diesem Recht unendlich oft Gebrauch zu machen [„... et même de nous en servir une infinité de fois (S. 23, Zeile 1—2 v. u.)]. Untersuchungen über die Widerspruchsfreiheit der mengentheoretischen Axiome sind interessant und wichtig, aber im Grunde Luxus, weil sie unsere Überzeugung von der Richtigkeit dieser Axiome weder festigen noch erschüttern können. Im Gegenteil, wenn das Auswahlaxiom zu Widersprüchen führen würde, müßten wir das Denken aufgeben [„... il faudrait désespérer de la raison humaine“ (S. 23, Zeile 2 v. o.)]. — Die Tatsache, daß das Auswahlaxiom gerade von so bedeutenden Mathematikern wie Lebesgue, Borel u. a. Kritik erfahren hat, führt Verf. auf seine „paradoxalen“, d. h. der Anschauung und gewissen Denkgewohnheiten widerstehenden Folgerungen zurück, von denen er einige ausführlich erörtert. — Außer zu dem „existentialen“ Standpunkt Cantors bekennt sich Verf. zu der These [sie ist schon von Borel aufgestellt worden in „Leçons sur la théorie des fonctions“, 2^e édition, Paris 1914, Note V. Les probabilités dénombrables; Ref.]: Von einer unendlichen Menge lassen sich höchstens abzählbar viele Elemente benennen, d. h. voneinander unterscheiden durch aus endlich vielen Worten bestehende Definitionen. Sie folgt aus der vom Verf. S. 33 beschriebenen „construction méthodique“ von Borel (im folgenden zitiert als c. m. Ref.), nach der alle möglichen „Sätze“ hinsichtlich ihrer „Länge“ (d. h. der Anzahl der „Worte“, aus denen sie bestehen) und die von gleicher Länge alphabetisch abgezählt werden sollen. Als „Worte“ können z. B. die Worte der französischen Sprache dienen, unter Weglassung mathematisch indifferenter, und unter Hinzunahme ev. mathematisch nützlicher Symbole. (Wer weiß von vornherein, ob ein Wort für immer ohne mathematisches Interesse bleibt sowie ob nicht eines Tages mathematische Symbole be-

nutzt werden, deren Sinn gar nicht beschrieben werden kann mittels der Bedeutungen, welche wir den Worten der bisher ausgebildeten Sprachen beizulegen gewohnt sind? Wäre die c. m. wirklich ein einwandfreies konstruktives Hilfsmittel, so wäre die Sprache ein Mechanismus und die Eigentätigkeit des Denkens eine Illusion. Ref.) Da nun Cantor bewiesen hat, daß es nichtabzählbare Mengen gibt, so gibt es bei Anerkennung der genannten These unennbare Dinge („éléments innommables“) [deren „Existenz“ in gewisser Weise auch Borel anerkannt hat, siehe obiges Zitat; Ref.]. Die Intuitionisten entnehmen diesem Dilemma die Aufforderung, die Mathematik nur auf „konstruktive“ Schlußweisen aufzubauen, d. h. auf solche, die keine unennbaren Elemente ins Spiel bringen. Verf. jedoch bekennt sich sozusagen von Herzen zur objektiven Existenz unennbarer Dinge. So gibt es z. B. Dezimalbrüche, die zu unregelmäßig verlaufen, Folgen zunehmender natürlicher Zahlen, die zu schnell wachsen, um irgendwie definiert werden zu können. — [Es ist klar, daß diese Auffassung des „es gibt“ einen Beobachter voraussetzt, der diese uns unzugänglichen Dinge wirklich kennt. Ref.]. In der Tat läßt Verf. zur Belebung der Darstellung gelegentlich einen übernatürlichen Intellekt auftreten (S. 19, 37), der sogar so spezialisiert wird, daß er zwar in endlicher Zeit abzählbar viele Denkkakte vollbringen kann, aber nicht imstande ist, die 2. Zahlklasse zu überblicken, in bez. auf welche ihn Verf. sagen läßt: „... que je suis aussi bien que vous incapable de me représenter“ (S. 38, letzte Zeile). Verf. ist überzeugt, daß nur mittels der unennbaren Elemente die logischen Unstimmigkeiten vermieden werden können, in welche seiner Meinung nach die Intuitionisten verfallen müssen, sofern sie nur effektiv angebbare Elemente gelten lassen wollen; es werden Beispiele besprochen. — Mit welcher Unbedingtheit Verf. den „existentiellen“ Standpunkt vertritt, zeigt Kap. 2, welches der Richardschen Antinomie gewidmet ist, und zwar in Gestalt der kleinsten unendlichen Ordnungszahl, die nicht durch einen endlich viele Worte umfassenden Satz definiert werden kann. Zunächst wird die Menge E der sogenannten wohldefinierten unendlichen Zahlen betrachtet, von denen jede erhalten wird mittels einer in endlich vielen Worten beschreibbaren Anwendung der beiden ersten Cantorschen Erzeugungsprinzipien (Addition von 1, Übergang zum Limes einer abzählbaren Folge wachsender Ordnungszahlen). Verf. gibt einige „erste Schritte“ an, welche in die Menge E hineinführen und die fortzusetzen sind in der Form immer umfassender Operationen [... et ainsi de suite indéfiniment, sans jamais nous attarder à répéter un procédé déjà employé, ou du moins en ne le répétant qu'un nombre fini de fois ...] (S. 32). Die c. m. leitet dieses Verfahren, insofern in ihr die benötigten Definitionen immer größerer Zahlen enthalten sind. [Die Benützung der c. m. wäre hierbei nur einem Intellekt von Nutzen, der unendlich viele Dinge überblicken kann! Was aber den konstruktiven Fortgang zu immer höheren Operationen angeht, so vollzieht er sich keineswegs zwangsläufig, sondern wir sind dabei auf unsere Achtsamkeit und Erfindungsgabe angewiesen, und die Erwähnung dieser psychologischen Momente ist zur Beschreibung des genannten „Verfahrens“ unerläßlich; das ergibt sich zwingend, wenn man über die einfachsten Schritte wirklich hinausgeht. Damit wird der Begriff der Menge E so vage, daß er mathematisch zu nichts verpflichtet. Wollte man das mit E Gemeinte exakt definieren, so könnte man das nur formal tun, etwa indem man E erklärt als die Menge aller unendlichen Ordnungszahlen, die samt ihren Vorgängern > 0 mit 1 oder ω konfinal sind; dann aber wird E die 2. Zahlklasse. Ref.] Bezeichnet man den Limes von E mit λ , so kann man die Konstruktion wieder aufnehmen, indem man, grob gesagt, mit λ so verfährt wie vorher mit der Zahl $\alpha \geq \omega$, von der aus λ definiert worden war. So gelangt man zur Menge E_1 , von da zur Menge E_2 , ... zu beliebigen Mengen E_α mit den Limes λ_α usw., und es präsentiert sich in schattenhaften Umrissen [„forcément vague“ (S. 36, 2. Absatz)] die Idee einer gewissen Menge E' mit dem Limes μ , welche alle E_α ... umfaßt. Mit μ kann man analog verfahren und so ohne Ende. Alle diese λ, μ, \dots sind abzählbar vom Standpunkt des Verf. — Vielleicht umfassender als E' ist die Menge E'' aller unendlichen Zahlen der 2. Klasse, die überhaupt irgendwie definiert werden können und also auch wieder durch die c. m. geliefert werden. Ist ν die kleinste Zahl, die nicht in E'' vorkommt, ν' der Limes von E'' , so gilt $\mu \leq \nu \leq \nu' < \omega_1$. Die hiermit gegebene Definition von E'' steht in der c. m. und muß daher nachträglich berücksichtigt werden. Wir hatten also die uns vorschwebende Menge E'' in Wahrheit noch gar nicht definiert, sondern nur einen Teil E'_1 von ihr. Ist ν_1 die kleinste Zahl, die nicht zu E'_1 gehört, so können wir analog von ν_1 zu $\nu_2, \dots, \nu_\alpha, \dots$ gelangen wie vorhin von λ zu $\lambda_2, \dots, \lambda_\alpha, \dots$. Indessen kommen wir hierbei nie zu Ende, denn sobald wir anhalten und sagen wollen, daß wir durch dieses Verfahren ν definieren können, fällt uns ein, daß auch dieser Satz in der c. m. steht und wir daher von neuem beginnen müssen. Kurz, diese Betrachtung, vom Verf. in Form eines Dialoges mit dem oben genannten übermenschlichen Intellekt dargestellt, schließt mit der Feststellung des letzteren, daß der Satz: „die kleinste nicht definierbare unendliche Zahl“ an sich sinnlos ist, daß es vielmehr eines unendlich langen Satzes bedarf, um ν wirklich zu definieren, und daß man erst dann wieder über E'' hinaus in die 2. Zahlklasse vordringen kann. [Der hiermit gegebene Hinweis auf einen bestimmten unendlich langen Satz ist aber auch wieder eine Definition von ν in endlich vielen Worten! Ref.] — Im 3. (Schluß-)Kapitel geht Verf. in rein mathematischer Weise ausführlich auf einen Satz von Denjoy ein, der eine Entsprechung zwischen gewissen Klassen von Folgen natürlicher Zahlen $p_n \leq n$ ($= 1, 2, \dots$) und den Zahlen der 2. Zahlklasse aussagt; Verf. zeigt, daß der theoretischen Bedeutung dieses Satzes keine prak-

tische entspricht, weil die Herstellung der ausgesagten Abbildung (im Bereich des Definierbaren) sofort mit sämtlichen Schwierigkeiten des Transfiniten belastet wird, die in Kapitel 2 erörtert wurden.

Neumer (Mainz).

Schmidt, Arnold: Wie dürfen wir mit dem Unendlichen umgehen? (Die Grundlage des mathematischen Intuitionismus.) Math.-phys. Semesterber., Göttingen 1, 200—212 (1950).

In diesem vor dem Mathematischen Förderungsverein gehaltenen Vortrag diskutiert der Verf. zunächst an einem Beispiel die Möglichkeit, daß eine Frage über eine unendliche Zahlenfolge an sich offen bleibt, weil eine generelle gesetzmäßige Entscheidung nicht erreichbar ist und die Vorstellung der individuellen Allgemeinheit sich im Unendlichen verliert, weist auf Schwierigkeiten hin, die sich aus der Vorstellung einer unendlichen Menge natürlicher Zahlen als fertiger Gesamtheit ergeben, und entwickelt dann die intuitionistischen Grundideen. Es wird gezeigt, wie Sätze der klassischen Analysis ihre Gültigkeit verlieren, die Einengung des Funktionsbegriffs durch die Forderung der Berechenbarkeit geschildert und zum Schluß auf die Aufhebung eines beweistheoretischen Tertium non datur hingewiesen.

Bachmann (Kiel).

• **Frege, G.:** The foundations of arithmetic: A logico-mathematical inquiry into the concept of number. — English translation by J. L. Austin. Oxford: B. H. Blackwell, Ltd., 1950. XXII, 238 p.; 16 s. net.

Algebra und Zahlentheorie.

Kombinatorik:

Chowla, S. and H. J. Ryser: Combinatorial problems. Canadian J. Math. 2, 93—99 (1950).

Es seien v , k und λ ganze Zahlen, die den Bedingungen

$$0 < \lambda = k(k-1)/(v-1) < k < v$$

genügen. Verff. beschäftigen sich mit v -zeiligen quadratischen Matrizen $M(v, k)$ aus lauter Elementen 0, 1, die einige folgender Eigenschaften haben. α (α'): In jeder Zeile (Spalte) stehen genau k Elemente 1. β (β'): In jedem Paar von Zeilen (Spalten) stehen genau an λ Stellen zwei 1 über- (neben-) einander. γ : Die Matrix ist (symmetrisch und) zyklisch. Die Frage der Existenz von Matrizen $M(v, k)$ mit den Eigenschaften α , β bzw. α , α' , β bzw. α , α' , β , β' bzw. α , α' , β , β' , γ wird der Reihe nach als Problem I, II, III, IV bezeichnet. Diese Probleme lassen auch manche anderen interessanten Formulierungen zu, die in der Kombinatorik, in der Theorie der endlichen projektiven Ebenen, der Hadamardschen Matrizen usw. wichtig sind. Problem I ist z. B. mit der Frage äquivalent, ob sich v Elemente derart in v Klassen mit je k Elementen zerlegen lassen, daß jedes Klassenpaar genau λ gemeinsame Elemente besitzt. Ferner ist Problem IV mit der Existenzfrage einer k -gliedrigen Differenzenmenge mod v äquivalent, wobei man unter einer solchen nach Singer [Trans. Amer. math. Soc. 43, 377—385 (1938); dies. Zbl. 19, 5] eine Menge d_1, \dots, d_k von ganzen Zahlen zu verstehen hat, so daß $d_i - d_j \equiv n \pmod{v}$ für jede einzelne Zahl $n = 1, 2, \dots, v-1$ genau mit λ geordneten Paaren d_i, d_j gilt. Verff. gewinnen folgende Sätze: Die Probleme I, II, III haben dieselben Lösungen $M(v, k)$. Es gibt unendlich viele Zahlenpaare v, k , für welche Problem III lösbar, Problem IV aber unlösbar ist. Besitzt nämlich v einen Primfaktor $p \equiv 3 \pmod{4}$ und der quadratfreie Kern von $k - \lambda$ einen ungeraden Primfaktor q mit $\left(\frac{-p}{q}\right) = -1$, so ist v, k ein solches Zahlenpaar. Es gibt auch unendlich viele Paare v, k , die keine Lösung für Problem I gestatten. Dies ist der Fall immer, wenn für eine gerade Zahl v der quadratfreie Kern von $k - \lambda$ verschwindet, oder wenn für $v \equiv (-1)^m \pmod{4}$

der quadratfreie Kern von $k - \lambda$ einen ungeraden Primfaktor q mit

$$\left(\frac{(-1)^m \lambda}{q}\right) = -1$$

possède.

T. Szele (Debrecen).

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

Hua, Loo-Keng: Geometries of matrices. II. Study of involutions in the geometry of symmetric matrices. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 193—228 (1947).

A, B, C, D, X, Y, Q désignant des matrices complexes $n \times n$, I, O resp. la matrice-unité et la matrice nulle, la matrice, $n \times 2n$, (X, Y) est dite symétrique si $XY' - YX' = 0$, X' et Y' étant resp. les transposées de X et Y . Deux matrices symétriques (X, Y) , (X_1, Y_1) appartiennent à la même classe si $X_1 = QX$, $Y_1 = QY$, Q régulière; une classe définit un point de l'espace projectif des matrices symétriques. La distance arithmétique de deux points (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) est le rang de la matrice $X_1 Y_2' - Y_1 X_2'$. Le centre du groupe des matrices symplectiques \mathfrak{I} d'ordre $2n$:

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{I} \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I}' = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix},$$

est formé des deux éléments $\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}$, $-\mathfrak{J}$; le groupe-quotient est isomorphe au groupe des transformations symplectiques:

$$(1) \quad (X_2, Y_2) = Q(X_1, Y_1) \mathfrak{I}$$

en coordonnées homogènes (X, Y) ,

$$(2) \quad Z_1 = (AZ + B)(CZ + D)^{-1},$$

en coordonnées non-homogènes $Z = Z'$. — L'A. étudie les involutions et les anti-involutions, leur forme normale, leurs points fixes ainsi que les automorphismes continus du groupe des transformations symplectiques. — La transformation (1) est une involution de première ou de seconde espèce suivant que $\mathfrak{I}^2 = \mathfrak{J}$ ou $\mathfrak{I}^2 = -\mathfrak{J}$; une anti-transformation symplectique

$$(3) \quad Q(X_2, Y_2) = (\bar{X}_1, \bar{Y}_1) \mathfrak{I}$$

est une anti-involution de première ou de seconde espèce suivant que $\mathfrak{I} \mathfrak{I} = \mathfrak{J}$ ou $\mathfrak{I} \mathfrak{I} = -\mathfrak{J}$. Toute involution de première espèce est symplectiquement équivalente à $Z_1 = HZH$, où H est la matrice diagonale $[+1, +1, \dots, +1, -1, \dots, -1]$, p termes $+1$, q termes -1 , $p + q = n$, $p \leq q$. Toute involution de seconde espèce est équivalente à $Z = -Z$. Deux transformations anti-symplectiques de matrices \mathfrak{I}_1 et \mathfrak{I}_2 sont dites équivalentes s'il existe une matrice symplectique \mathfrak{P} telle que $\mathfrak{P}^{-1} \mathfrak{I}_1 \mathfrak{P} = \mathfrak{I}_2$. Les anti-involutions de première espèce et de seconde espèce sont resp. équivalentes à $Z = \bar{Z}^{-1}$ et à $Z = -H \bar{Z}^{-1} H$,

$$H = [+1, \dots, +1; -1, \dots, -1], \quad p \leq q.$$

— Toute involution est le produit de deux anti-involutions commutatives de première espèce et toute anti-involution de seconde espèce est le produit de trois anti-involutions de première espèce, commutant deux-à-deux. Une transformation symplectique est le produit de deux involutions de seconde espèce. Une involution de seconde espèce possède deux points isolés, c'est-à-dire deux points dont la distance arithmétique vaut n . — L'A. détermine les éléments fixes des involutions de première espèce et des anti-involutions et fait une étude des involutions commutatives. Finalement, il montre que tout automorphisme continu du groupe des transformations symplectiques est soit un automorphisme intérieur soit une transformation anti-symplectique.

Th. Lepage (Bruxelles).

Richter, H.: Über Matrixfunktionen. Math. Ann., Berlin 122, 16—34 (1950).

Eine allgemeine stetige Matrixfunktion $B = F(A)$ liegt bekanntlich dann vor, wenn die Komponenten von B eindeutige, stetige Funktionen der Komponenten von A sind und falls für $|C| \neq 0$ $F(CAC^{-1}) = CBC^{-1}$ ist. A habe lauter verschiedene Eigenwerte, dann kann A auf Diagonalform transformiert werden: $(\lambda_r) = CAC^{-1}$, auch die Matrix CBC^{-1} besitzt dann Diagonalform (μ_r) : $\mu_r = g_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. g_r ist eine symmetrische Funktion der λ_i ($i \neq r$). Sind s_1, \dots, s_{n-1} die $n-1$ ersten Potenzsummen der Eigenwerte, dann gilt offenbar $\mu_r = h(\lambda_r, s_1, \dots, s_{n-1})$. Für B wird dann als erste Normaldarstellung geschrieben $B = h(A, s_1, \dots, s_{n-1})$. — Eine Matrixfunktion heißt gewöhnliche Matrixfunktion, falls sie erhalten wird durch Anwendung einer stetigen Funktion $y = f(x)$ auf eine Matrix A : $B = f(A)$, in dem Sinne, daß man sich A und also auch B auf Diagonalform transformiert denkt und $\mu_r = f(\lambda_r)$ setzt entsprechend der ersten Normaldarstellung. Die Abhängigkeit von den s_i entfällt hier. Die gewöhnliche Matrixfunktion $B = f(A)$ heißt speziell analytisch, wenn $f(x)$ an den Stellen der Eigenwerte von A analytisch ist. Die Theorie der analytischen Matrixfunktionen wird auf diejenige der Funktionen von Matrizen mit lauter zusammenfallenden Eigenwerten zurückgeführt, und das Umkehrproblem wird behandelt und durch interessante Beispiele belegt. — Für analytische Matrixfunktionen $B = f(A)$ ist die Ableitung $f'(A)$ eindeutig definiert. Unter der „Variation in Richtung der Matrix D “ verstehe man $\delta f(A) = f(A + tD) - f(A)$ ($t \ll 1$). Es gilt $\delta f(A) = t f'(A) D + O(t^2)$, falls $AD = DA$, entsprechend dem Satz, daß nur in einem kommutativen System eine Ableitung im üblichen Sinne existiert. Hingegen gilt bei einer beliebigen Matrix D , daß die Spur s der Matrix $G\{\delta f(A) - t f'(A) D\}$ von $O(t^2)$ ist, wo G eine beliebige mit A vertauschbare Matrix bedeutet.

Kriszten (Zürich).

Parodi, Maurice: Sur une application d'un théorème de M. Müller. Bull. Sci. math., II. S. 73_I, 192—196 (1949).

Es sei $A = \det(a_{ik})$, a_{ik} reell, $s_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{n'} |a_{ik}| > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$);

dann ist nach Hadamard $A \neq 0$ und nach einer früheren Untersuchung des Verf. (dies. Zbl. 33, 343) genauer $A > 0$. — Wenn für irgendeine Permutation p_1, \dots, p_n der Zahlen $1, \dots, n$ alle Zahlen

$$(*) \quad s'_i = |a_{ip_i}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p_i}}^n |a_{ik}| > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

sind, ist nach M. Müller (dies. Zbl. 30, 291) $A \neq 0$; (A hat dann das Vorzeichen derjenigen Determinante, die aus A dadurch entsteht, daß man $a_{ik} = 0$ setzt für $k \neq p_i$). Verf. gibt für den Fall, daß n Vielfaches von 3 bzw. 4 ist, und für die Permutationen

$$2, 1, 3, 5, 4, 6, \dots, n-3+2, n-3+1, n \quad \text{bzw.}$$

$$2, 1, 3, 4, 6, 5, 7, 8, \dots, n-4+2, n-4+1, n-4+3, n$$

schärfere Bedingungen für die Elemente a_{ik} an, unter denen genauer A und sogar alle seine Hauptminoren positiv sind. Dies trifft z. B. im ersten Fall zu, wenn außer den Ungleichungen (*) die Ungleichungen $a_{ii} > 0$ ($i = 1, \dots, n$), $a_{3\lambda+1, 3\lambda+2} a_{3\lambda+2, 3\lambda+1} < 0$ ($\lambda = 0, 1, \dots, (n-3)/3$) gelten und die Hauptdiagonalelemente der Zeilen Nr. 4, 7, 10, \dots , $n-2$ größer sind als die Summe der Beträge der Elemente, die in derselben Zeile links von ihnen stehen. [Beim Verf. sind diese Bedingungen teilweise falsch formuliert, z. B. widersprechen sich seine Bedingungen (3) und (4a)]. — Außerdem benutzt Verf. das Ergebnis des Ref., um in den hier betrachteten Fällen Bereiche abzugrenzen, in denen die charakteristischen Zahlen der Matrix $\|a_{ik}\|$ liegen.

M. Müller (Tübingen).

Sherman, Jack and Winifried J. Morrison: Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **21**, 124—127 (1950).

Die quadratische Matrix $\mathfrak{U}' = (a'_{ik})$ unterscheide sich von der Matrix $\mathfrak{U} = (a_{ik})$ nur im Element der R -ten Zeile und S -ten Spalte: $a'_{RS} - a_{RS} = \Delta$. $\mathfrak{B}' = (b'_{ik})$ und $\mathfrak{B} = (b_{ik})$ seien die resp. Inversen von \mathfrak{U}' und \mathfrak{U} . Dann gilt:

$$b'_{ik} - b_{ik} = -\Delta \cdot b_{iR} b_{Sk} / (1 + \Delta \cdot b_{SR}),$$

wobei der Nenner genau dann verschwindet, wenn \mathfrak{U}' singular ist. Die angegebene, etwas umständlich bewiesene Formel eignet sich zur numerischen Berechnung der Inversen von Matrizen hoher Ordnung, wenn nach Berechnung der Inversen der Ausgangsmatrix nur wenige Elemente derselben geändert werden. — Durchführung eines numerischen Beispielles.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Foulkes, H. C.: Differential operators associated with S -functions. *J. London math. Soc.* **24**, 136—143 (1949).

L'A. poursuit l'étude des fonctions de Schur sur les groupes symétriques [cf. D. E. Littlewood, *Theory of group characters and matrix representations of groups of finite order*, Oxford (1940); ce Zbl. **25**, 9] en généralisant le produit de deux fonctions de Schur et les résultats de Zia-ud-Din [Proc. Edinburgh math. Soc. **5**, 43—45 (1936); ce Zbl. **15**, 54].

J. Braconnier (Lyon).

Mejman, N. N.: Einige Fragen der Lage der Nullstellen von Polynomen. *Uspechi mat. Nauk* **4**, Nr. 6 (34), 154—188 (1949) [Russisch].

Verf. gibt eine zusammenfassende Darstellung und elementare Herleitung einer Reihe von Sätzen, die etwas über die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem gegebenen Intervall bzw. Gebiet der komplexen Ebene aussagen, und zwar in anderer Form, als es in dem Buch von N. G. Čebotarev und N. N. Mejman „Das Routh-Hurwitzsche Problem für Polynome und ganze Funktionen“ (Trudy mat. Inst. Steklov Nr. 26, Moskau 1949) durchgeführt wurde. Er beginnt, von einfachen algebraischen Eigenschaften der Polynome ausgehend, mit der Cartesischen Zeichenregel und der Sturmschen Kette sowie deren verschiedenen, z.T. klassischen Verallgemeinerungen. Sodann wendet er sich dem entsprechenden zweidimensionalen Problem zu und geht dabei von der Hurwitzschen Aufgabe aus, die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms zu ermitteln, die in einer bestimmten Halbebene, etwa der oberen, liegen. Die Ergebnisse sind in zahlreichen Einzelsätzen (im ganzen 19) formuliert. Wieweit diese wenigstens inhaltlich bereits in den einschlägigen Arbeiten von Hurwitz, Routh, Cohn u. a. zu finden sind bzw. welche Verfeinerungen der Verf., dessen Leistung vor allem im Methodischen zu suchen sein dürfte, selbst gefunden hat, ist aus der Arbeit nicht zu ersehen. — Im vorletzten Paragraphen bringt Verf. einen anscheinend neuen Zusammenhang zwischen den Nullstellen eines Polynoms $F(z) = g(z) + i h(z)$ und denen seiner „Komponenten“ $g(z)$ und $h(z)$, im letzten behandelt er schließlich eine Verallgemeinerung des Schurschen Algorithmus [I. Schur, *Math. Z.* **1**, 377—402 (1918)] zur Abzählung der Wurzeln eines Polynoms, die im Inneren des Einheitskreises liegen. *W. Hahn* (Berlin).

Kuipers, L.: Note on the location of zeros of polynomials. *Proc. Akad. Wet.*, Amsterdam **53**, 482—486; *Indag. math.*, Amsterdam **12**, 134—138 (1950).

Verf. beweist fünf Sätze, vier sind ähnlich den Sätzen des Ref. (dies. Zbl. **32**, 247), der fünfte verallgemeinert einen Satz einer anderen Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **33**, 97). — Es gilt z. B. der Satz: Haben die Halbebenen E_1 und E_2 die Grenzgerade l , enthält E_1 bzw. E_2 die Nullstellen des Polynoms

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n) \quad \text{bzw.} \quad g(z) = (z - b_1)(z - b_2) \cdots (z - b_n)$$

und bezeichnen α und β zwei Punkte von E_1 , für die $|\alpha - \beta| > d = \max |\alpha - a_k|$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sind, so ist das Polynom $f(z) + g(z)$ in den gemeinsamen inneren

Punkten einer Parabel P und einer Hyperbel H von Null verschieden. Die Parabel P hat den Brennpunkt bzw. die Leitlinie in α bzw. in l . Die Hyperbel H hat die Brennpunkte α und β und die Hauptachsenlänge d . Gy. Sz.-Nagy (Szeged).

Gruppentheorie:

Clifford, A. H.: Extensions of semigroups. Trans. Amer. math. Soc. 68, 165—175 (1950).

L'A. emploie les locutions suivantes: semigroupe Σ = système muni d'une opération binaire associative notée ab pour laquelle la loi de simplification n'est pas obligatoire; idéal S dans Σ = partie de Σ telle que $a \in S$ et $b \in S$ impliquent $ab \in S$ et $ba \in S$; semigroupe différence $T = \Sigma - S$ = semigroupe obtenu en conservant les éléments de Σ non dans S et en remplaçant par un même élément zéro tout élément de S . Le problème d'une extension de S par T consiste à trouver un semigroupe $\Sigma \supset S$ et tel que le semigroupe différence $\Sigma - S$ soit isomorphe à T . Dans ce problème S est un semigroupe donné et T un semigroupe donné admettant un élément zéro et n'ayant aucun élément commun avec S . L'extension de S par T n'est pas toujours possible; mais lorsque S possède une unité bilatère elle est équivalente (théorème 2) à l'existence d'un homomorphisme ramifié de T dans S , c'est à dire d'une application $A \rightarrow \bar{A}$ de $T^* = T - \{0\}$ dans S qui respecte la propriété du produit lorsque celui-ci n'est pas nul ($\overline{AB} = \overline{AB}$ quand $AB \neq 0$). Quand la condition (A) est satisfaite, c'est à dire quand les hypothèses $as = bs$ et $sa = sb$ pour tout s entraînent $a = b$, les extensions de S par T s'obtiennent au moyen d'homomorphismes ramifiés et enchaînés de T dans le semigroupe des translations de S à gauche \mathcal{A} et à droite \mathcal{P} . Expliquons ce langage. Une translation de S à gauche (ou à droite) se réduit dans le cas d'une unité bilatère à une application $s \rightarrow \lambda s$ (ou $s \rightarrow s\rho$) de S dans lui-même; les deux translations définies par λ et ρ sont enchaînées lorsque $s\lambda t = s\rho t$ quels que soient s et t dans S ; on considère alors les deux applications $A \rightarrow \lambda_A$ et $A \rightarrow \rho_A$, où λ_A et ρ_A sont constamment enchaînées, qui réalisent deux homomorphismes ramifiés de T dans \mathcal{A} et \mathcal{P} ; l'extension de S par T est ensuite obtenue par la réunion des ensembles S et T^* avec un produit approprié (théorème 3). Le cas d'un semigroupe S de Rees, sans zéro et complètement simple [Proc. Cambridge phil. Soc. 36, 387—400 (1940); ce Zbl. 28, 4] fait l'objet du dernier paragraphe. Dans ce cas l'existence de l'extension Σ est assurée et sa réalisation obtenue.

L. Lesieur (Poitiers).

Jaffard, Paul: Applications de la théorie des filets. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1125—1126 (1950).

Dans un groupe abélien réticulé G (ou latticed ordered abelian group) l'A. a introduit précédemment la notion de filet [voir C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1024—1025 (1950)] par l'équivalence suivante entre éléments de G_+ : $a \equiv b$ si pour $x \in G_+$ les relations $a \cap x = 0$ et $b \cap x = 0$ s'impliquent mutuellement. Le filet \bar{a} est alors la classe d'équivalence de a . Les applications visées par cette note 2 concernent la décomposition de G en un produit ordonné, ou en une somme ordonnée directe, de groupes totalement ordonnés. Cette décomposition, quand elle existe, est unique, et ne possède qu'un nombre fini de facteurs dans le cas d'une somme directe. La condition d'existence fait intervenir la propriété A: étant donnés deux filets \bar{a} et \bar{b} , différents de 0, on peut trouver $x \equiv a$ tel que $x \not\leq b$, et la notion d'éléments indépendants a_i en nombre fini. [Les (a_i) sont indépendants si pour toute partie véritable (a_j) on a: $\cap (a_j) > \cap (a_i)$.] La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe réticulé G soit le produit ordonné de n groupes totalement ordonnés (ou encore ait la dimension linéaire n) peut alors s'énoncer ainsi: G doit vérifier la propriété A, et n doit être

le nombre maximal d'éléments indépendants de G . Les démonstrations s'appuient sur les résultats de la note 1; elles sont clairement esquissées. *L. Lesieur.*

Jaffard, Paul: Nouvelles applications de la théorie des filets. *C. r. Acad. Sci., Paris* **230**, 1631—1632 (1950).

Les résultats présentés dans cette troisième note concernent d'abord la décomposition d'un groupe réticulé G en somme directe de groupes totalement ordonnés. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une telle décomposition sont: 1. G vérifie la propriété A (voir l'analyse de la note 2 ci-dessus); 2. L'ensemble F des filets de G vérifie la condition de chaîne descendante; 3. F vérifie la condition de chaîne ascendante. La condition 3. peut d'ailleurs être remplacée par 3': F est relativement complété (c'est à dire que dans le treillis ou „lattice“ F les relations $a \leq x \leq b$ entraînent l'existence d'un élément y tel que $x \cap y = a$ et $x \cup y = b$). L'A. étudie ensuite les réalisations irréductibles de G comme sous-groupe propre d'un produit Γ de groupes totalement ordonnés. (Sous-groupe propre = sous-groupe invariant par l'opération \cap .) La décomposition $\Gamma = \prod_{i \in I} G_i$ est

irréductible pour G si G n'est pas sous-groupe propre du produit obtenu en supprimant une partie non vide de I . Le théorème 3 donne alors comme condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une décomposition irréductible Γ pour G : tout filet de G différent de O doit être supérieur ou égal à un filet minimal. Le théorème 4, qui termine la note, assure l'unicité d'une décomposition Γ irréductible pour G . Les démonstrations ne seront publiées qu'ultérieurement. *L. Lesieur* (Poitiers).

Tartakovskij, V.: Über den Prozeß des Auslöschens. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **58**, 1605—1608 (1947) [Russisch].

Eine Gruppe \mathfrak{G} sei gegeben durch erzeugende Elemente S_1, \dots, S_m mit den Relationen

$$S_1^{n_1} = 1, \dots, S_m^{n_m} = 1; f_1(S) = 1, \dots, f_k(S) = 1.$$

[Die $f_k(S)$ sind dabei irgendwelche Wörter. Die n_μ werden formale Ordnungen genannt, die wirklichen Ordnungen der S_μ als Gruppenelemente können infolge der übrigen Relationen kleiner sein.] Ein Potenzprodukt $S_1^{\alpha_1} \dots S_m^{\alpha_m}$ heißt gekürztes Wort, wenn $i_p \neq i_{p+1}$, die Exponenten $\alpha_p \neq 0$ sind und dem absolut kleinsten Restsystem mod. n_{i_p} angehören. In der Menge aller gekürzten Wörter wird eine lexikographische Ordnung eingeführt. Unter dem Tilgungsgebiet $\pi(\mathfrak{G})$ verstehe man die Gesamtheit aller gekürzten Wörter $\varphi(S)$ mit folgender Eigenschaft: Als Element von \mathfrak{G} betrachtet [d. h. unter Beachtung von $f_\kappa(S) = 1$, $\kappa = 1, \dots, k$] ist $\varphi(S)$ gleich einem Wort $\psi(S)$ mit $\psi(S) < \varphi(S)$ (im Sinne der lexikographischen Anordnung). Das Hauptproblem der vorliegenden Arbeit ist es, eine gewisse Übersicht über $\pi(\mathfrak{G})$ zu gewinnen. Wegen der Fülle der eigens zu diesem Zweck eingeführten Begriffe ist die Formulierung der Resultate recht kompliziert. Deshalb sei auf die Besprechung einer anderen Arbeit des Verf. verwiesen (dies. Zbl. **34**, 15).

R. Kochendörffer (Rostock).

Grün, Otto: Beiträge zur Gruppentheorie. IV. Über eine charakteristische Untergruppe. *Math. Nachr.*, Berlin **3**, 77—94 (1950).

Ist G eine beliebige Gruppe und m eine ganze Zahl größer als 1, so sei G_m die von allen Elementen $(xy)^{-m} x^m y^m$ erzeugte Untergruppe von G . Diese wichtige vollinvariante Untergruppe ist der Durchschnitt aller, und also der kleinste, Normalteiler N von G mit der Eigenschaft: die Abbildung der Elemente von G/N auf ihre m -ten Potenzen ist ein Endomorphismus. [Über Gruppen mit dieser Eigenschaft vgl. z. B. F. Levi: *J. Indian math. Soc.*, II. S. **8**, 1—9 (1944) und **9**, 37—42 (1945)]. G_2 ist die Kommutatorgruppe von G , und es gilt: $G_2 = G_{m-1} G_m G_{m+1}$. Bezeichnet G^i die von allen i -ten Potenzen von Elementen in G erzeugte Untergruppe von G , so sieht man sofort, daß $G_m \leq G_2 \cap G^{m-1} \cap G^m$ ist. Gleichheit gilt hier nicht immer;

doch kann man zeigen, daß $G_m = G_2 \cap G^{m-1} \cap G^m$ gilt, wenn G eine freie Gruppe ist. Von den vielen interessanten, in dieser Abhandlung hergeleiteten Relationen zwischen diesen vollinvarianten Untergruppen seien nur die folgenden erwähnt: $G_m G_{m-1} = G_{m-1} G_2^{m-1} = G_2^{m-1} G_m$ und die $m(m-2)$ -ten Potenzen der Elemente dieser Untergruppe sind in $G_{m-1} \cap G_m$ enthalten; $[G, G^{m-1}] [G, G^m]^{m-1} \leq G_m$.
Baer (Urbana, Ill.).

Kinosita, Yoshihisa: On an enumeration of certain subgroups of a p -group. J. Osaka Inst. Sci. Technology 1, 13—20 (1949).

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist ein Satz, in welchem Verf. für p -Gruppen ein „Enumeration Principle“ herleitet. Dieser Satz ist eine leichte Verallgemeinerung eines bekannten Resultates von P. Hall. Zum Beweis werden zwei vorbereitende Sätze vorangeschickt. Im ersten wird die Anzahl der Untergruppen mit gegebenen Invarianten in einer Abelschen p -Gruppe bestimmt. In dem zweiten vorbereitenden Satz handelt es sich um eine Polynomidentität, in welche die in dem ersten Satz gewonnene Anzahl der Untergruppen eingeht. Szép (Szeged).

Mattioli, Ennio: Sopra una particolare proprietà dei gruppi abeliani finiti. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 3, 59—65 (1950).

Es wird folgender Satz für endliche Abelsche Gruppen bewiesen: Es sei G eine Abelsche Gruppe vom Typ (p, \dots, p) und von Ordnung p^n mit den Basiselementen R_1, \dots, R_n . Wenn n die Form $n = \frac{p^k - 1}{p - 1}$ hat ($k \geq 2$, ganz), so hat G eine Untergruppe Γ von der Ordnung p^{n-k} mit folgender Eigenschaft:

$$G = \Gamma + \Gamma R_1 + \dots + \Gamma R_1^{p-1} + \Gamma R_2 + \Gamma R_2^2 + \dots + \Gamma R_n^{p-1}.$$

Verf. wendet dieses Resultat auf ein Toto- bzw. Totipspielproblem an. Szép.

Graev, M. I.: Freie topologische Gruppen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 12, 279—324 (1948) [Russisch].

Soit X un espace topologique; on appelle groupe topologique libre de base X tout groupe topologique $F(X)$ tel que: (F_1) : X est un sous-espace de F ; (F_2) : le sous-groupe fermé de F engendré par X est F lui-même; (F_3) : toute application continue de X dans un groupe topologique G peut se prolonger en une représentation continue de F dans G . On définit de même le groupe topologique abélien libre de X , soit $A(X)$, en se restreignant dans (F_3) à ne considérer que des groupes abéliens. Ces notions appartiennent évidemment au domaine des „applications universelles“ [Bourbaki, Algèbre, Chap. III, appendice III; Actual. sci. industr., No. 1044, Paris 1948] et ont été introduites par A. Markoff [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 8, 3—64 (1945)]; il faut toutefois observer que, dans l'article plus récent analysé ci-dessous, l'A. renvoie aussi à une Note de S. Kakutani [Proc. Acad. Tokyo 20, 585—598 (1944)]. — L'espace X étant donné, le groupe F — s'il existe — est évidemment unique à un isomorphisme près; l'A. démontre son existence dans le cas où X est complètement régulier; sa démonstration, inspirée de Markoff, occupe six pages — mais on trouvera dans l'article analysé ci-dessous la démonstration de Kakutani, laquelle, avec la démonstration d'unicité, ne comporte qu'une seule page. L'A. démontre ensuite un certain nombre de propriétés des groupes libres, par exemple: si Y est un sous-espace fermé de l'espace complètement régulier X , alors le sous-groupe de $F(X)$ engendré (algébriquement) par Y est fermé dans $F(X)$; si X est connexe il en est de même de $F(X)$; si X n'est pas discret, $F(X)$ n'est pas séparable. — L'A. examine ensuite le cas où X est compact; dans ce cas, $F(X)$ est évidemment réunion dénombrable d'ensembles compacts, donc est un espace normal (cf. N. Bourbaki, Topologie générale, Chap. IX, p. 67, Exer. 6, Paris 1948; ce Zbl. 31, 55) de plus, $F(X)$ est complet; si un espace complètement régulier Y est tel que $F(Y)$ soit isomorphe à $F(X)$, où X est compact (resp. compact métrisable) alors Y est compact (resp. compact métrisable), mais n'est pas nécessaire-

ment homéomorphe à X , bien entendu; on a même $\dim(X) = \dim(Y)$ si X est métrisable; l'A. donne ensuite une classification relativement simple des $F(X)$ pour lesquels X est un espace compact dénombrable. Finalement, l'A. montre par un exemple qu'un sous-groupe fermé d'un $A(X)$ n'est pas nécessairement de la forme $A(Y)$, ce qui montre, comme aussi l'une des propriétés énoncées ci-dessus, que l'analogie avec la théorie algébrique des groupes libres n'est pas parfaite.

R. Godement (Nancy).

Graev, M. I.: Theorie der topologischen Gruppen. I.: Normen und Metrik auf Gruppen. Vollständige Gruppen. Freie topologische Gruppen. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 2 (36), 3—56 (1950) [Russisch].

Le Chap. I de cet article d'exposition montre essentiellement comment la topologie d'un groupe peut être définie au moyen d'une famille d'écartés invariants à gauche (cf. Bourbaki, Topologie générale, Chap. IX, Paris 1948; ce Zbl. 31, 55) [il est à noter que l'A. appelle „norme“ un fonction $N(x)$ qui peut être nulle pour $x \neq e$: c'est regrettable], et, dans le cas où le groupe possède un système fondamental dénombrable de voisinages de e , par une métrique. On montre aussi que la propriété qu'on vient d'énoncer (séparabilité) se conserve par „extension“: si H et G/H sont séparables, il en est de même de G . — Le Chap. II expose les résultats bien connus de A. Weil et de D. A. Rajkov sur les groupes complets, ainsi que les résultats connus relatifs aux représentations continues d'un groupe complet séparable sur un autre. — Enfin, le Chap. III concerne les groupes topologiques libres, dont l'A. expose les principales propriétés (cf. l'analyse précédente). — L'article se termine par une bibliographie dans laquelle ne sont cités ni le livre de Weil sur les groupes topologiques, ni ceux de Bourbaki sur la même question (Topologie générale, Chap. III et IX).

R. Godement (Nancy).

Cohen, L. W. and C. Goffman: The topology of ordered abelian groups. Trans. Amer. math. Soc. 67, 310—319 (1949).

Soit G un groupe abélien totalement ordonné, muni de la topologie dans laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formé par les intervalles ouverts; on suppose G non discret. En étudiant un système fondamental de voisinages de 0, formé par les intervalles $] -x_\xi, x_\xi[$ ($\xi < \xi^*$, ξ^* étant un ordinal dépendant de G), les AA. donnent une construction du complété de G , en généralisant les coupures de Dedekind par les „lower segments“ de Dedekind (on appelle ainsi une partie A de G telle que, si $x \in A$, A contienne $] \leftarrow, x[$ et rencontre $] x, \rightarrow[$ et que, pour tout $x > 0$, il existe $y \in A$ tel que $x + y \notin A$). Un groupe abélien totalement ordonné H est appelé une extension archimédienne de G si G est un sous-groupe de H tel que, pour tout $y \in H$ tel que $y > 0$, il existe $x \in G$ et des entiers $m > 0$ et $n > 0$ tels que $y \leq nx$ et $x \leq my$; on dit que G est a -complet s'il est identique à toutes ses extensions archimédiennes. Si G est a -complet, il est complet (la réciproque indiquée dans le th. 10 semble être une trivialité). Ce travail est illustré par l'étude des groupes de Hahn [cf. R. Baer, J. reine angew. Math. 160, 208—226 (1929)].

J. Braconnier (Lyon).

Wang, Hsien-Chung: A problem of P. A. Smith. Proc. Amer. math. Soc. 1, 18—19 (1950).

L'A. montre qu'un groupe séparable, localement compact, métrique non discret contient un sous-groupe propre non dénombrable partout dense. *Borel (Zurich).*

• **Dieudonné, Jean:** Sur les groupes classiques. (Actual sci. industr. Nr. 1040; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg. VI.) Paris: Hermann 1948. 82 p.

Les groupes classiques sont le groupe linéaire général [déjà étudié par l'A., Bull. Soc. math. France 71, 27—45 (1943); 74, 59—64 (1946); ce dernier contenant une lacune comblée par Hua, Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 533—537 (1949); ce Zbl. 35, 20] et ses sous-groupes laissant invariante une forme bilinéaire symétrique ou anti-

symétrique ou hermitienne, auxquels ce livre est consacré. L'A. étudie leur structure pour des corps de base quelconques, par des méthodes aussi uniformes et géométriques que possible, et en particulier retrouve en les complétant beaucoup de résultats de Dickson. — Groupe symplectique: On sait qu'il n'y a à des équivalences près qu'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée f sur K^n (n pair); soit V un sous-espace de K^n , on appelle conjugué de V l'ensemble V^* des vecteurs tels que $f(V, x) = 0$, V est isotrope si $V \cap V^* \neq 0$, totalement isotrope si $V \subset V^*$. Soit $\text{Sp}_n(K)$ le groupe des transformations linéaires laissant f invariante; l'A. montre que, à 3 exceptions près, le quotient de $\text{Sp}_n(K)$ par son centre (formé de 2 éléments) est simple. La démonstration repose sur une étude des sous-espaces de K^n , des involutions et transvections de $\text{Sp}_n(K)$; il est établi entre autres que (a) 2 sous-espaces V_1 et V_2 sont transformés l'un de l'autre par un élément de $\text{Sp}_n(K)$ si et seulement si les restrictions de f à V_1 et V_2 sont équivalentes, (b) tout élément de $\text{Sp}_n(K)$ est un produit de transvections de $\text{Sp}_n(K)$, une transvection étant une transformation $x \rightarrow x + \varrho(x)a$ [$\varrho(x)$ forme linéaire sur K^n , nulle en a]. La simplicité du quotient de $\text{Sp}_n(K)$ par son centre s'obtient dans le cas général en montrant qu'un sous-groupe invariant de $\text{Sp}_n(K)$ non contenu dans son centre renferme toutes les transvections laissant invariant un hyperplan, donc $\text{Sp}_n(K)$ vu (a) et (b). — Groupe orthogonal: soit tout d'abord K de caractéristique $\neq 2$ et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur K^n ; son indice ν est d'après E. Witt [J. reine angew. Math. **176**, 31—33 (1936); ce Zbl. **15**, 57] la dimension maxima des sous-espaces totalement isotropes de K^n . $O_n(K, f)$ désigne le groupe des transformations laissant f invariante, $O_n^+(K, f)$ le groupe formé des éléments de $O_n(K, f)$ de déterminant 1 (rotations); l'A. montre entre autres: l'analogue de (a), complétant ainsi un théorème de Witt, loc. cit., sur lequel il s'appuie, que tout élément de $O_n(K, f)$ est un produit d'au plus n symétries, que si $\nu \geq 1$, $O_n^+(K, f)$ est engendré par des rotations hyperboliques; on nomme ainsi une rotation laissant invariant un plan non isotrope sous-tendu par 2 droites isotropes. Soit enfin Z_n , $\Omega_n(K, f)$ le centre, resp. le groupe des commutateurs de $O_n(K, f)$, l'A. montre que $\Omega_n(K, f)/\Omega_n(K, f) \cap Z_n$ est simple pour $n \geq 5$, $\nu \geq 1$. Des résultats de B. L. v. d. Waerden (Gruppen von linearen Transformationen, Berlin 1935, ce Zbl. **11**, 101) concernant les cas $3 \leq n \leq 6$ sont utilisés; par des exemples l'A. montre que ce théorème est inexact pour $\nu = 0$. Si K est de caractéristique 2 l'étude est plus délicate. On trouve que en général $\Omega_n(K, f)$ est simple si $\nu \geq 1$, les théorèmes démontrés devenant inexactes si $\nu = 0$. Dans tout ce qui précède, K est naturellement supposé commutatif. — Groupe unitaire: 1) K commutatif; on suppose que c'est une extension séparable de rang 2 d'un corps K_0 , et l'involution du groupe de Galois de K sur K_0 joue le rôle du passage au complexe conjugué dans la définition d'une forme hermitienne. Le quotient par son centre du groupe $U_n^+(K, f)$ des transformations de déterminant 1 laissant invariante une forme hermitienne symétrique non dégénérée sur K^n est simple si $n \geq 2$, $\nu \geq 1$. 2) K non commutatif; il est alors supposé réflexif, c. à d. posséder un antiautomorphisme involutif à l'aide duquel on définit une forme hermitienne sur un espace vectoriel, disons à droite, K^n . L'A. établit que K est une extension de rang 4 de son centre, qu'il décrit, et ensuite que le quotient de $U_n(K, f)$ par son centre est simple si $n \geq 2$, $\nu \geq 1$. Des contre-exemples sont indiqués dans les cas 1) et 2) lorsque $\nu = 0$. A. Borel (Zurich).

Mostow, G. D.: A new proof of E. Cartan's theorem on the topology of semi-simple groups. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 969—980 (1949).

L'A. donne une démonstration directe du théorème de E. Cartan: tout groupe de Lie connexe et semi-simple est homéomorphe au produit d'un groupe compact et d'un espace euclidien. Cette démonstration est basée sur le résultat suivant: soient L une algèbre de Lie semi-simple (sur le corps des réels) et L_C l'algèbre de Lie (sur le corps des complexes) obtenue par

extension aux complexes du corps des scalaires de L ; alors, il existe, dans L_C , une forme réelle M de L , invariante par l'involution $x + i y \rightarrow x - i y$ de L_C et dont la forme fondamentale est définie négative; de plus, L est somme directe de $J = L \cap M$ et $S = L \cap i M$. On applique alors ce résultat à l'algèbre L d'un groupe de Lie connexe et semi-simple G . $\text{ad}(L_C)$ définit un sous-groupe (de Lie) G_C^* de $\text{Aut}(L_C)$ et les images dans $\text{ad}(L_C)$ de L et M définissent de même des sous-groupes G^* et H^* de G_C^* . Soient F^* le sous-groupe de G_C^* défini par J et S^* l'ensemble des $\exp(\text{ad}(x))$ avec $x \in S$. On peut choisir dans L_C une base (sur C) par rapport à laquelle les matrices des $\text{ad}(x)$ ($x \in M$) soient antisymétriques réelles; F^* est alors l'ensemble des éléments de G^* dont les matrices sont orthogonales réelles. On montre alors que le groupe $\text{Aut}(L_C)$ et ses sous-groupes qui laissent invariants L et M sont algébriques (sur les réels) et que G_C^* , G^* et H^* sont respectivement les composantes connexes de l'identité dans ces groupes. Il en résulte que, si on écrit les éléments de G^* sous la forme $x = f \cdot s$, où f est un élément de matrice orthogonale réelle et $s = \exp(i W)$, la matrice de W étant antisymétrique réelle, on a $f \in F^*$ et $s \in S^*$ et, enfin, G^* est homéomorphe au produit $F^* \times S^*$ (F^* étant compact et S^* euclidien). On remarque alors que G^* est l'adjoint de G : G^* est donc isomorphe à G/D (où D est le centre (discret) de G). On en déduit que G est homéomorphe au produit $F' \times S'$, où F' est le sous-groupe de G défini par J et S' l'ensemble des $\exp(x)$ avec $x \in S$. S' est homéomorphe à S , donc euclidien; F' est produit d'un R^n et d'un sous-groupe distingué compact K , d'où le théorème de E. Cartan.

Jean Braconnier (Lyon).

Gelf'and, I. M. und M. A. Najmark (Neumark): Über den Zusammenhang zwischen den Darstellungen einer komplexen halbeinfachen Lieschen Gruppe und ihrer maximalen kompakten Untergruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 63, 225—228 (1948) [Russisch].

Gelf'and, I. M. und M. A. Najmark (Neumark): Der Zusammenhang zwischen den unitären Darstellungen der komplexen unimodularen Gruppe und einer ihrer unitären Untergruppen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 14, 239—260 (1950) [Russisch].

On désigne par G le groupe complexe unimodulaire à n variables. Si $n = n_1 + \dots + n_r$ est une partition de n en entiers > 0 , tout $g \in G$ peut se mettre sous la forme d'une matrice à r lignes et colonnes, matrice dont les éléments g_{ij} sont eux-mêmes des matrices (ordinaires) à n_i lignes et n_j colonnes. On note K le sous-groupe de G formé des g „triangulaires“ ($g_{ij} = 0$ pour $i > j$); ce sous-groupe dépend naturellement de la partition considérée. On note de même D le sous-groupe de K formé des matrices „diagonales“: $g_{ij} \neq 0$ pour $i \neq j$. Si \mathbb{U} est le sous-groupe de G formé des matrices unitaires, tout $g \in G$ s'écrit $g = ku$ ($k \in K$, $u \in \mathbb{U}$), u étant déterminé modulo le sous-groupe $\Gamma = D \cap \mathbb{U}$. On peut donc identifier l'espace homogène G/K à \mathbb{U}/Γ , d'où résulte évidemment l'existence dans \mathbb{U}/Γ d'une mesure $d\mu(\tilde{u})$ invariants par \mathbb{U} ; les AA. montrent d'abord que la mesure de Haar de G s'exprime par

$$\int x(g) d\mu(g) = \int d\mu(\tilde{u}) \int x(ku) d\mu_1(k) = \int d\mu(u) \int x(ku) d\mu_1(k)$$

où x désigne une fonction sommable sur G et où $d\mu_1(k)$ désigne la mesure invariante à gauche sur K . De là et par des calculs simples résulte une formule qui exprime la façon dont G transforme la mesure $d\mu(\tilde{u})$: si l'on note par $\tilde{u} \rightarrow \tilde{u} \cdot g$ les transformations définies par G dans \mathbb{U}/Γ , on a $d\mu(\tilde{u} \cdot g)/d\mu(\tilde{u}) = \beta(\tilde{u} \cdot g)(u, g)/\beta$; dans cette formule, β est la fonction donnée sur G par

$$\beta(g) = |A_1|^{-2n_1-2n_2-\dots-2n_r} \cdot |A_2|^{2n_1-2n_2-\dots-2n_r} \dots |A_r|^{2n_1+\dots+2n_{r-1}}$$

avec $A_i = \det(g_{ii})$; cette fonction vérifie l'identité $\beta(kg) = \beta(k)\beta(g)$ en sorte que, puisque $\beta(\gamma) = 1$ pour $\gamma \in \Gamma$, on peut poser $\beta(u) = \beta(\tilde{u})$ (\tilde{u} désigne la classe de u modulo Γ). — De là résulte la possibilité de définir toute une série de représentations unitaires de G ; elles s'effectuent dans l'espace L^2 construit sur la mesure $d\mu(\tilde{u})$; elles sont données explicitement par la formule $U_g f(\tilde{u}) = f(\tilde{u} \cdot g) \alpha(ug)/\alpha(u)$, où la fonction $\alpha(g)$ est assujettie uniquement à vérifier les conditions suivantes: $\alpha(kg) = \alpha(k) \cdot \alpha(g)$; $|\alpha(u)| = 1$; $\alpha(k)$ ne dépend que des éléments „diagonaux“ de k ; enfin, sur le sous-groupe D , on a $\alpha(\delta) = \beta^{-\frac{1}{2}}(\delta) \cdot \chi(\delta)$ où χ est un caractère de module 1 de D . Bien que ces formules puissent paraître compliquées, leur interprétation est extrêmement simple (et n'est pas donnée par les AA.): les représentations de G ainsi obtenues

ne sont autres que les représentations imprimitives engendrées par les représentations unitaires de dimension un du sous-groupe D . — Bien entendu, si l'on remplace $\alpha(g)$ par $\omega(g)\alpha(g)$, où $|\omega(g)| = 1$, $\omega(kg) = \omega(g)$, on obtient une représentation équivalente à celle dont on était parti. — Les représentations ainsi obtenues forment la „série fondamentale“ de représentations de G ; elles sont irréductibles, ce que les AA. ne démontrent malheureusement pas ici. — Si en particulier $n_1 = n_2 = \dots = 1$, on obtient la „série fondamentale non dégénérée“ de représentations de G , qui a déjà été étudiée par les AA. [Mat. Sbornik, n. S. 21, 405—434 (1947)]; comme on le sait, ces représentations sont les composantes irréductibles de la représentation „régulière“ de G . Tout ce qui suit se rapporte à ces représentations particulières. — Soit U_σ une de ces représentations; si le caractère χ correspondant de D est égal à 1 sur I — et seulement dans ce cas — il existe dans l'espace L^2 de la représentation un vecteur f_0 non nul invariant par les U_u ($u \in \mathbb{U}$), et ce vecteur est essentiellement unique; la fonction élémentaire de type positif $\varphi(g) = (U_\sigma f_0, f_0)$ est alors constante sur les classes bilatères modulo \mathbb{U} ; une telle fonction est appelée par les AA. fonction „sphérique“ associée à la représentation; les AA. procèdent alors au calcul explicite de ces fonctions. Pour cela, on observe tout d'abord que tout revient à calculer $\varphi(\delta)$ ($\delta \in D$); et comme la fonction f_0 n'est évidemment autre que $f_0(\tilde{u}) = 1$, on a la formule $\varphi(\delta) = \int \alpha(u\delta) du(u)$: reste à calculer cette intégrale, ce que les AA. font par récurrence sur la dimension n de G et par une méthode très analogue à celle qui permet de calculer les caractères des groupes classiques; le résultat obtenu est du reste du même genre: si $\chi(\delta) = |A_2|^{\varepsilon_2} \dots |A_n|^{\varepsilon_n}$, on trouve en effet, en posant $\varrho_1 = 0$:

$$\varphi(\delta) = \det(A^{\varepsilon_1} q) / \prod_{p < q} (A_p^2 - A_q^2),$$

à une constante près. Ces calculs prouvent évidemment l'immense virtuosité des AA.; mais on est bien obligé d'avouer que le mécanisme profond de ces phénomènes reste inexpliqué! — Finalement, le problème suivant est résolu (par des considérations très simples, mais qui reposent essentiellement sur le fait qu'on connaît explicitement les représentations considérées de G): comment une représentation de la série fondamentale non dégénérée se décompose-t-elle lorsqu'on la restreint à \mathbb{U} ? La réponse est fort simple: si la représentation considérée de G est associée au caractère χ de D , les représentations irréductibles de \mathbb{U} qu'on obtient par décomposition sont celles qui contiennent des vecteurs propres de „poids“ $\chi(\gamma)$ ($\gamma \in I$); si de plus ces vecteurs forment, dans l'espace de la représentation considérée de \mathbb{U} , un sous-espace de dimension d , alors cette représentation est contenue exactement d fois dans la représentation $u \rightarrow U_u$ de \mathbb{U} .

R. Godement (Nancy).

Yoshizawa, Hisaaki: Unitary representations of locally compact groups. — Reproduction of Gelfand-Raikov's theorem. Osaka math. J. 1, 81—89 (1949).

Comme son titre l'indique, cet article démontre le théorème fondamental de Gelfand et Raikov [voir Mat. Sbornik, n. S. 13, 301—319 (1943)]: existence d'un système complet de représentations unitaires irréductibles pour tout groupe localement compact. Bien que l'A. n'ait pas pu prendre connaissance du mémoire de Gelfand et Raikov, ses démonstrations sont sensiblement les mêmes que celles de ces Auteurs.

R. Godement (Nancy).

Yoshizawa, Hisaaki: On some types of convergence of positive definite functions. Osaka math. J. 1, 90—94 (1949).

Démonstration du théorème suivant: soit G un groupe localement compact arbitraire; soit E un ensemble de fonctions continues et de type positif sur G ; on peut munir E soit de la topologie faible soit de celle de la convergence uniforme sur tout ensemble compact dans G ; ceci étant, si $\varphi(e)$ est constant lorsque φ parcourt E , ces deux topologies coïncident. — Le même résultat, avec sensiblement la même démonstration, a été déjà publié par D. Raikov [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 1279—1282 (1947)].

R. Godement (Nancy).

Kaplansky, Irving: Groups with representations of bounded degree. Canadian J. Math. 1, 105—112 (1949).

On sait qu'un groupe compact dont toutes les représentations irréductibles sont de degré 1 est abélien et réciproquement. L'A. donne une généralisation de ce résultat; pour cela il dit qu'un groupe G vérifie P_n si pour n éléments a_1, \dots, a_n quelconques de G , l'ensemble des produits obtenus par les permutations paires de a_1, \dots, a_n est égal à l'ensemble des produits obtenus par les permutations impaires. (P_2 est la commutativité, P_k implique P_{k+1} , et si G est topologique connexe, P_{k+1}

implique P_k .) Il définit ensuite pour un groupe localement compact G une classe de représentations par des opérateurs bornés d'un espace de Banach et montre que si G est localement compact unimodulaire, le fait que ces représentations soient de dimensions finies $\leq n$ est équivalent à: G vérifie $P_{s(n)}$; $s(n)$ est un entier $\leq n^2 + 1$, dont une connaissance plus précise dépend de la résolution d'un problème posé par l'A. sur les algèbres de matrices. Enfin, des relations entre ce qui précède et une tentative de généralisation d'un théorème de Halmos [Bull. Amer. math. Soc. 49, 619—624 (1943), Th. 1] sont indiquées. A. Borel (Zurich).

Schaerf, Henry M.: Sur l'unicité de la mesure de Haar. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1112—1113 (1949).

L'A. utilise les résultats qu'il a précédemment annoncés (ce Zbl. 35, 151) pour démontrer l'unicité de la mesure de Haar dans un groupe localement compact; sa démonstration utilise aussi un article de Kakutani et Kodaira [Proc. Acad. Tokyo 20, 444—450 (1944)] dont le rapporteur n'a malheureusement pas connaissance. R. Godement (Nancy).

Sherman, Seymour: A problem of Raïkov. Duke math. J. 17, 21—26 (1950).

Soit G un groupe topologique, \mathfrak{I} la tribu engendrée par les réunions dénombrables A de voisinages de parties de G . Une mesure de Haar-Raïkov est une mesure m définie sur \mathfrak{I} , positive, complètement additive, invariante à gauche, telle que $m(A) > 0$ pour tout A non vide et que, si $m(E)$ est fini, il existe $A \supset E$ de mesure finie. L'existence d'une telle mesure entraîne la précompacité locale de G ; s'il en est ainsi, m se prolonge aux ensembles boréliens de manière unique; cette dernière mesure est la restriction de la mesure de Haar sur le complété \bar{G} de G et le complémentaire de \bar{G} est de mesure (de Haar) intérieure nulle. Braconnier.

Levi, F. W.: Haar-measure. (Symposium on the theory of measure.) Math. Student, Madras 16, 87 (1949).

Verbände. Ringe. Körper:

Foster, Alfred L.: On the permutational representation of general sets of operations by partition lattices. Trans. Amer. math. Soc. 66, 366—388 (1949).

Jeder Zerlegung $\alpha = \{ \dots, A, \dots \}$ einer Grundmenge $U = \{ \dots, x, \dots \}$ in paarweise fremde Teilmengen (Zellen) $A \subset U$ entspricht eineindeutig eine Kongruenzrelation: $x \equiv y \bmod \alpha$, d. h. x, y gehören derselben Zelle $A \in \alpha$ an. Die Gesamtheit \mathcal{U} aller Zerlegungen α von U bildet einen Vollverband $(\mathcal{U}, \subset) = (\mathcal{U}, \cap, \cup)$, wenn man 1. zwei Zerlegungen als gleich betrachtet, falls sie genau dieselben Zellen besitzen und 2. die Relation „ $\alpha \subset \beta$ (α feiner als β), wenn $AB = A$ oder leer für alle $A \in \alpha, B \in \beta$ “ erklärt. Es sei $\Gamma = \{ \dots, \gamma, \dots \}$ eine Menge von Operationen (= Funktionen) mit einem oder mehreren Argumenten in U . Operationen $\gamma(x), x \in U$ mit einem Argument heißen Monotationen, sie heißen schlicht, wenn $x \neq y \rightarrow \gamma(x) \neq \gamma(y)$. Eine schlichte Monotation heißt eine Permutation, wenn $\gamma(x) = y$ für jedes $y \in U$ eine Lösung $x \in U$ hat. Man erklärt dann (U, Γ) als eine allgemeine Algebra. Eine Zerlegung $\alpha \in \mathcal{U}$ heißt eine Γ -Zerlegung, wenn aus $x_1 \equiv y_1, x_2 \equiv y_2, \dots, \bmod \alpha$ folgt $\gamma(x_1, x_2, \dots) \equiv \gamma(y_1, y_2, \dots) \bmod \alpha$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Die Gesamtheit $\mathcal{U}_\Gamma \subset \mathcal{U}$ aller Γ -Zerlegungen bildet einen Vollunterverband $(\mathcal{U}_\Gamma, \cap, \cup)$ von $(\mathcal{U}, \cap, \cup)$. Jede Operation $\gamma \in \Gamma$ induziert eine Operation γ^* in eine beliebige Zerlegung $\alpha \in \mathcal{U}_\Gamma$, wie folgt: $\gamma^*(X_1, X_2, \dots) = Y$, wenn $\gamma(x_1, x_2, \dots) = y, x_i \in X_i, y \in Y; X_i$ und $Y \in \alpha$. Dadurch entsteht eine Zellenalgebra (α, Γ^*) . Die Abbildung $x \rightarrow X, \gamma \rightarrow \gamma^*, x \in X, X \in \alpha$ ist eine Homomorphie $(U, \Gamma) \rightarrow (\alpha, \Gamma^*)$. Man schreibt auch $(\alpha, \Gamma^*) = (U, \Gamma)/\alpha$. Es sei $\Omega = \{ \dots, \omega, \dots \}$ eine Menge von Monotationen, $\Omega \subset \Gamma$. Ein $\alpha \in \mathcal{U}_\Gamma$ heißt Ω -schlicht bzw. Ω -permutational, wenn die Bildoperation ω^* von jedem $\omega \in \Omega$ bei der obigen Homomorphie $(U, \Gamma) \rightarrow (\alpha, \Gamma^*)$ eine schlichte Monotation bzw. eine Permutation der Zellen in α ist. Die Gesamtheit \mathcal{S}_Ω aller Ω -schlichten Zerlegungen bildet einen \cap -Vollverein (eine für \cap voll abgeschlossene teilweise geordnete Menge) $(\mathcal{S}_\Omega, \cap)$. Die Gesamtheit \mathcal{P}_Ω aller Ω -permutationalen Zerlegungen braucht, wie Verf. durch Beispiele belegt, weder ein \cap -Verein noch ein \cup -Verein zu sein. Ebenso braucht \mathcal{S}_Ω nicht immer ein \cup -Verein zu sein. Verf. gibt Kriterien für Abgeschlossenheit der Operationen \cap bzw. \cup in \mathcal{P}_Ω und \mathcal{S}_Ω . \mathcal{P}_Ω ist dann und nur dann ein Vollverband, wenn $\cap \mathcal{P}_\Omega = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{P}_\Omega} \alpha$ in \mathcal{P}_Ω liegt. Bei einer endlichen Grundmenge ist \mathcal{P}_Ω

immer ein Verband und zwar identisch mit der Menge aller Ω -Zerlegungen, die die Zerlegung

$\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{P}_\Omega$ als eine Verfeinerung enthalten. Ist Ω eine Menge von Monotationen, so ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man annimmt, daß Ω abgeschlossen für die Verknüpfung (Produkt) von Monotationen ist, so weit man \mathfrak{U}_Ω , \mathfrak{S}_Ω , \mathfrak{P}_Ω untersucht. Denn bedeute Ω das kleinste abgeschlossene System über Ω , so gilt $\mathfrak{U}_\Omega = \mathfrak{U}_\Omega$ bzw. $\mathfrak{S}_\Omega = \mathfrak{S}_\Omega$ bzw. $\mathfrak{P}_\Omega = \mathfrak{P}_\Omega$. Es sei Ω bzw. Ω^* eine Menge von Monotationen in \bar{U} bzw. in einer Zerlegung α von U . Ein Homomorphismus (bzw. Isomorphismus) $(U, \Omega) \rightarrow (\alpha, \Omega^*)$ heißt stark, wenn $\omega_1 \omega_2(x) \rightarrow \omega_1^* \omega_2^*(X)$ gilt, wobei $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\omega_i \rightarrow \omega_i^*$, $i = 1, 2$ und $x \rightarrow X$. Besteht hierbei Ω^* aus lauter Permutationen der Zellen von α , so heißt (α, Ω^*) eine Darstellung der Algebra (U, Γ) . Da Ω als abgeschlossen vorausgesetzt werden kann, so ist (α, Ω^*) eine Halbgruppe von Permutationen der Zellen von α , und, falls U eine endliche Menge ist, sogar eine Gruppe. Jede Zerlegung $\alpha \in \mathfrak{P}_\Omega$ liefert eine Darstellung von (U, Γ) . Insbesondere, wenn $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{P}_\Omega \in \mathfrak{P}_\Omega$, d. h. wenn $(\mathfrak{P}_\Omega, \bigcap, \bigcup)$ ein Vollverband ist, dann existiert eine feinste Darstellung (\mathfrak{p}, Ω) . In der klassischen Theorie der Imprimitivitäten ist dies trivial wahr, \mathfrak{p} ist die Zerlegung von U in seine Grundelemente. Wenn die feinste Darstellung (\mathfrak{p}, Ω) existiert, dann ist jede abstrakte Eigenschaft der Halbgruppe (\mathfrak{p}, Ω) eine Invariante mod Π , wobei Π die Gesamtheit aller Permutationen in U , der dargestellten Algebra (U, Γ) ist. — Verf. gibt schließlich ein Konstruktionsverfahren der feinsten Zerlegung \mathfrak{p} , wenn U endlich, Ω erzeugbar von einem Element ω und $\Gamma = \Omega$.

D. A. Kappos (Erlangen).

Foster, Alfred L.: On n -ality theories in rings and their logical algebras, including triality principle in three valued logics. Amer. J. Math. 72, 101—123 (1950).

Es sei (U, Φ) eine Algebra, d. h. eine Grundmenge $U = \{\dots, x, \dots\}$ mit der Menge $\Phi = \{\dots, \varphi, \dots\}$ aller Operationen ζ in U (Monotationen, Bitationen, ..., Multitationen) (siehe vorsteh. Referat). Verf. bezeichnet als „punkte“ (geschrieben mit kleinem p) bzw. „Punkte“ (geschrieben mit großem P) die Elemente $x \in U$ bzw. $\varphi \in \Phi$. Jede p -Permutation $\varrho \in \Phi$ induziert eine durch $\zeta \rightarrow \zeta_\varrho = \varrho^{-1} \zeta (\varrho(x), \varrho(y), \dots)$ definierte p -Monotation in Φ , die wie Verf. zeigt, ebenfalls eine P -Permutation in Φ ist. Der Punkt $\zeta_\varrho \in \Phi$ heißt Umformung von ζ bei ϱ . Ist $K = \{\dots, \varrho, \dots\}$ eine Gruppe von p -Permutationen, so ist die Menge der induzierten P -Permutationen $\zeta \rightarrow \zeta_\varrho$ für alle $\varrho \in K$ ebenfalls eine zu K isomorphe Gruppe. Die Gesamtheit aller Punkte $\zeta_\varrho \in K$ bei festem ζ für alle $\varrho \in K$ bildet eine Kongruenzklasse mod K . $\zeta \equiv \zeta'$ (K) bedeutet dann: die Punkte ζ und ζ' gehören derselben Klasse mod K an. Man sagt auch ζ und ζ' sind K -al. Ist die Ordnung n der Gruppe K endlich, $n = 2, 3, \dots$, so sagt man „dual“, „trial“, ... Besteht eine Klasse mod K aus nur einem Punkt, so heißt dieser Punkt selbst- K -al. Ist K endlich von der Ordnung n , so ist die Anzahl der Punkte einer Klasse mod K ein Teiler von n . Ist die Gruppe K abelsch, so ist jeder Punkt $\varrho \in K \subset \Phi$ selbst- K -al. Ist insbesondere $U = R$, wobei $(R, +, \times)$ ein Ring, bedeutet $K = \{\xi, \varrho', \varrho'', \dots\} = \{\dots, \varrho, \dots\}$ eine Gruppe von Permutationen in R mit ξ als Identität und ist $\{\times, \times', \times'', \dots\} = \{\dots, \times_\varrho, \dots\}$ die Menge aller Umformungen der Operation des Produktes \times bei allen $\varrho \in K$, so bezeichnet Verf. die Algebra $(R, \times, \times', \times'', \dots, \xi, \varrho', \varrho'', \dots)$ als eine K -Logik des Ringes R . Jeder Begriff, der mit Termen aus der K -Logik definierbar ist, heißt K -logisch. Zu den K -logischen Begriffen des Ringes R gehören alle Multitationen, die der Menge $\{\times, K\}$ gehören, wobei $\{\times, K\}$ aus allen Multitationen besteht, die aus \times und allen $\varrho \in K$ kompositional erzeugt werden können. — Ein Ring $(R, +, \times)$ heißt K -logisch bzw. equational K -logisch bzw. fest K -logisch definierbar, wenn die Operation $+$ ein K -logischer Begriff ist bzw. $+$ $\in \{\times, K\}$, d. h. $a + b \equiv \zeta(a, b) \in \{\times, K\}$ bzw. $+$ ein K -logischer eindeutig bestimmter Begriff ist, d. h. kein anderer Ring $(R, +_1, \times)$ mit derselben Grundmenge R , demselben \times , aber $+_1 \neq +$, wobei $+_1$ ebenfalls K -logisch definierbar ist, existiert. Ist ein Ring Boolesch und bedeutet C die Komplementationsgruppe „ $x^* = 1 - x$, $x^{**} = x$ “, die also von der Ordnung 2 ist, so ist er equational und fest C -logisch. Ein „Boolean-like“ Ring [Definition des Verf., s. Trans. Amer. math. Soc. 59, 166—187 (1946)] ist equational, aber im allgemeinen nicht fest C -logisch definierbar. Ein Körper $(F, +, \times)$ ist fest, jedoch im allgemeinen (insbesondere, wenn seine Charakteristik $\neq 2$ ist), nicht equational C -logisch definierbar. Ebenso kann der Ring der ganzen Zahlen nicht equational C -logisch definiert werden. Ist ein Ring fest bzw. equational K -logisch definierbar, so heißt die Permutationsgruppe K halb- bzw. volladaptiert zum Ring. Ist K volladaptiert zu einem Ring R , so wird R vom Verf. als eine Ringlogik (K) bezeichnet. Während nach Verf. die Frage der Existenz einer zu einem Ring halbadaptierten Gruppe leicht durch Konstruktion beantwortet werden kann, weist die Frage der Existenz einer zu einem Ring volladaptierten Gruppe Schwierigkeiten auf und ist vom Verf. nicht vollständig beantwortet. Verf. zeigt aber, daß neben Booleschen Ringen auch gewisse p -Ringe, d. h. Ringe in welchen gilt: $a^p = a \times a \times \dots \times a = a$ und $p^a = a + a + \dots + a = 0$, Ringlogiken sein können. Wie z. B. ein Boolescher Ring (2-Ring) eine Ringlogik (C) ist, so ist ein 3-Ring ein Ringlogik (N), wobei N die zyklische Negationsgruppe „ $a^1 = 1 + a$, $a^{11} = 1 + 1 + a = 2 + a$, $a^{111} = a$ “ bedeutet, denn N ist zu einem 3-Ring volladaptiert. Ein Trialitätsprinzip und eine der De Morganschen Formel entsprechende Formel gilt in dieser Logik. Sie enthält die einfache dreiwertige Logik. Die Frage, ob jeder p -Ring eine Ringlogik ist, beantwortet Verf. in der vorliegenden Arbeit nicht. In einer Bemerkung jedoch, die Verf. während der Drucklegung der Arbeit hinzufügte, erwähnt er, daß er dies inzwischen in einer Arbeit gezeigt hat, die in Acta math. erscheint.

D. A. Kappos (Erlangen).

Lalan, Victor: Équations fonctionnelles dans un anneau booléen. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 603—605 (1950).

Die Operationen $(+, \vee)$ bzw. $(+, \wedge)$, wobei $+$ Addition mod 2 bedeutet, führen bekanntlich in einem Booleschen Verband die algebraische Struktur eines Ringes ein. Dies vereinfacht nach Verf. die Auflösung von Funktionalgleichungen in Booleschen Verbänden. Da jede beliebige binäre Operation als ein bilineares Polynom $\alpha pq + \beta p + \gamma q + \delta$ geschrieben werden kann, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Konstanten aus dem Körper der zwei Elemente $(0, 1)$ bedeuten, so kann man die Untersuchung eines Systems von Funktionalgleichungen mit n Unbekannten auf die Untersuchung eines Systems von algebraischen Gleichungen mit $4n$ Unbekannten zurückführen. Als Anwendung behandelt Verf. das Scheffersche Problem der Definition der Booleschen Algebra mittels nur einer undefinierten Operation und bestimmt zwei Lösungen, nämlich die Rejektion $p' \cdot q'$ und Exklusion $p' \vee q'$. Die bekannte Nicodsche Ausgangsformel ist wahr, nicht nur, wenn die Strichoperation p/q die Exklusion bedeutet, sondern auch, wenn p/q die Implikation bedeutet. Weiter untersucht Verf. die möglichen Ringstrukturen der Booleschen Algebra.

D. A. Kappos (Erlangen).

Sikorski, Roman: A theorem on extension of homomorphisms. Ann. Soc. Bôlonaise Math. **21**, 332—335 (1949).

Verf. zeigt: Wenn A_0 ein Boolescher Unterverband von einem Booleschen Verband A ist, so kann jeder Homomorphismus von A_0 in B , wobei B ein Boolescher Vollverband ist, zu einem Homomorphismus von A in B erweitert werden. Daraus folgt unmittelbar: Zu jedem Ideal J_0 eines Booleschen Verbandes A , $J_0 \neq A$, existiert ein Primideal J von A , so daß $J_0 \subset J$ gilt [Stone, Trans. Amer. math. Soc. **40**, 37—111 (1936); dies. Zbl. **14**, 340]. Außerdem kann man mit Hilfe des Satzes vom Verf. zeigen: 1. ein Boolescher Vollverband B ist dann und nur dann eine minimale Erweiterung eines Booleschen Verbandes A , wenn ein Boolescher Unterverband B_0 von B existiert, der zu A isomorph ist und außerdem für jedes $b \in B$, $b \neq 0$, ein $b_0 \in B_0$ existiert, so daß $0 \neq b_0 \subseteq b$ gilt; 2. alle minimalen Erweiterungen von A sind isomorph.

D. A. Kappos (Erlangen).

• Waerden, B. L. van der: Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether, Tl. 1. 3. verb. Aufl. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. 33.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1950. X, 292 S. Geh. DM 24.—; geb. DM 27.—.

Die vorliegende dritte Auflage des ersten Bandes von diesem überall bekannten Werke ist eine Neubearbeitung der zweiten Auflage (dies. Zbl. **16**, 339), die schon seit dem zweiten Weltkrieg völlig vergriffen war. Verf. hat die Gelegenheit der Notwendigkeit dieser Neuaufgabe benutzt, um sein Buch nochmals zu modernisieren. Den Bedürfnissen der neuen Zahlentheorie und der algebraischen Geometrie folgend, wurden die bewerteten Körper (X. Kapitel) ganz bedeutend ausführlicher dargelegt; vier ganz neue Paragraphen sind hinzugetreten (mit den Überschriften: Bewertungen von algebraischen Zahlkörpern; Bewertungen der rationalen Funktionenkörper $A(x)$; Bewertung von algebraischen Funktionenkörpern; Die abstrakte Riemannsche Fläche). Wieder wurden der Wohlordnungssatz (Beweis durch Auswahlpostulat) und, darauf fußend, die transfinite Induktion aufgenommen, wodurch ermöglicht wurde, den Hauptsatz von Steinitz über die Existenz und Eindeutigkeit der algebraisch abgeschlossenen Körpererweiterung in vollem Umfang zu beweisen (wie das auch schon in der ersten Auflage geschah; in der zweiten Auflage wurde nur der Fall eines abzählbaren Grundkörpers betrachtet). Der Paragraph über die Normen und Spuren wurde Neubearbeitet. Auch wurde die Frage der algebraischen Abhängigkeit und Unabhängigkeit ausführlicher betrachtet. Dank des Wohlordnungssatzes wird dann auch der Hauptsatz über transzendente Körpererweiterungen in voller Allgemeinheit bewiesen. Dazu treten noch eine Reihe kleinerer Ergänzungen und Verbesserungen (z. B. wurde die Definition des Polynomringes anders gefaßt). Das ohnehin prächtige Aufgabematerial ist noch etwas bereichert worden. Es treten auch einige neue Literaturhinweise hinzu, auch ist das „Sachverzeichnis“ erweitert. Einige Ausführungen (teils von weniger zentraler Wichtigkeit) sind weggelassen (Ausführung der körpertheoretischen Operationen in endlich vielen Schritten, die metazyklischen Gleichungen von Primzahlgrad, die Formel des Perioden-

produktes von Gauß) oder kürzer gefaßt worden, auch wurden einige Paragraphen und alle Aufgaben klein gedruckt (wodurch das Buch an Übersichtlichkeit gewann). So wurde der Umfang trotz der wesentlichen inhaltlichen Vermehrung nur um 20 Seiten vermehrt. Die Ausstattung des Buches ist die alte, wenn nicht noch etwas ästhetischer geworden. Es ist sehr erfreulich, den ersten Band dieses allgemein beliebten Werkes in neuer, frischer Form wieder in die Hand zu bekommen. Rédei (Szeged).

Dubisch, Roy and Sam Perlis: The radical of an alternative algebra. Amer. J. Math. **70**, 540—546 (1948).

Eine alternative Algebra \mathfrak{A} ist durch folgende Abschwächung des assoziativen Gesetzes charakterisiert: Für zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{A}$ soll stets gelten $(xx)y = x(xy)$, $(xy)x = x(yx)$, $(yx)x = y(xx)$. Mit Hilfe eines Satzes von Artin lassen sich die alternativen Algebren aber auch in folgender Form definieren: Jede von zwei beliebigen Elementen $x, y \in \mathfrak{A}$ erzeugte Unter algebra ist assoziativ. Ein Element $x \in \mathfrak{A}$ heißt quasi-rechtsregulär, wenn es ein $y \in \mathfrak{A}$ gibt mit $x + y + xy = 0$. y heißt dann Quasi-Rechtsinverses von x und ist gleichzeitig Quasi-Linksinverses. Verff. betrachten nun vier verschiedene Definitionen des Radikals einer alternativen Algebra \mathfrak{A} . Dabei soll \mathfrak{A} zunächst ein Einselement enthalten, und der Skalarenkörper soll nicht der Primkörper der Charakteristik 2 sein. 1. Das \mathfrak{R} -Radikal \mathfrak{R} von \mathfrak{A} ist definiert als die Gesamtheit aller Elemente $r \in \mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft, daß mit jedem regulären $g \in \mathfrak{A}$ auch $g + r$ regulär ist. Das \mathfrak{R} -Radikal ist ein Ideal, und das \mathfrak{R} -Radikal von $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$ ist Null. 2. Das \mathfrak{N} -Radikal \mathfrak{N} ist die Gesamtheit aller eigentlich nilpotenten Elemente aus \mathfrak{A} , zu der noch 0 hinzugenommen wird. \mathfrak{N} ist Summe aller Nil-Rechts(Links-)Ideale von \mathfrak{A} . 3. Das \mathfrak{Q} -Radikal \mathfrak{Q} ist Summe aller quasiregulären Rechtsideale von \mathfrak{A} (d. h. derjenigen Rechtsideale, deren sämtliche Elemente quasiregulär sind). 4. Das \mathfrak{S} -Radikal \mathfrak{S} ist Durchschnitt aller Ideale \mathfrak{B} von \mathfrak{A} mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ direkte Summe von einfachen Algebren ist (Albert). Verff. zeigen: Es ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{N} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{S}$. Die Existenz eines Einselementes wird nur bei den Beweisen für das \mathfrak{R} -Radikal benutzt. Das \mathfrak{R} -, \mathfrak{Q} - und \mathfrak{S} -Radikal können auch in Algebren gebildet werden, die diese Forderung nicht erfüllen. Es sei \mathfrak{A}_0 eine beliebige alternative Algebra, und es seien ferner $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{Q}_0, \mathfrak{S}_0$ die entsprechenden Radikale. Ist weiter \mathfrak{A} diejenige Algebra, die aus \mathfrak{A}_0 durch Adjunktion eines Einselementes hervorgeht, und sind $\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{S}$ die entsprechenden Radikale von \mathfrak{A} , so wird gezeigt, daß $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0, \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0$ ist.

Kowalsky (Erlangen).

Hochschild, G.: Note on maximal algebras. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 11—14 (1950).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **32**, 8) gibt Verf. hier eine Anwendung der dort definierten Erweiterungen von Algebren. Eine vollständig primäre Algebra B über dem Körper F mit dem Radikal R heißt quasinormal, wenn B/R normal ist. Es wird gezeigt, daß jede quasinormale Algebra zu einer durch Erweiterung bestimmten sogenannten Polynomalgebra isomorph ist. Bergström.

Chevalley, Claude and R. D. Schafer: The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6 . Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 137—141 (1950).

Bei der Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen [B. L. van der Waerden, Math. Z. **37**, 446—462 (1933); dies. Zbl. **7**, 292] treten fünf Ausnahmegruppen auf, die nicht in die unendlichen Folgen der übrigen Gruppen eingeordnet werden können. Für zwei dieser Gruppen, die F_4 von der Dimension 52 und die E_6 von der Dimension 78, werden Darstellungen ihrer Lieschen Algebren angegeben. Dazu wird die einfache Jordansche Algebra \mathfrak{J} von der Dimension 27 über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K von der Charakteristik 0 benutzt, deren Elemente Hermitesche Matrizen (3×3) mit Elementen aus der Cayleyschen Algebra \mathfrak{C} von der Dimension 8 über K sind. Die abgeleitete Algebra \mathfrak{D} von \mathfrak{J} besteht aus allen Endomorphismen D mit $D(X \circ Y) = DX \circ Y + X \circ DY$ und ist eine Liesche Algebra. Schließlich möge unter einer Rechtsmultiplikation R_Y der Endomorphismus $X \rightarrow X \circ Y$ für

alle X in \mathfrak{F} verstanden werden. Dann gilt folgender Satz: Die Liesche Ausnahmealgebra F_4 ist die abgeleitete Algebra \mathfrak{D} . Die Algebra E_6 ist die Algebra $\mathfrak{D} + \{R_Y\}$, worin für R_Y alle Rechtsmultiplikationen von Elementen Y zu nehmen sind, deren Spur Null ist. Zum Beweise wird eine dreigliedrige Identität zwischen den Spuren von Elementen aus \mathfrak{C} abgeleitet und benutzt.

Wever (Mainz).

Fuchs, Ladislaus: Further generalisation of the notion of relatively prime ideals. Bull. Calcutta math. Soc. **39**, 143—146 (1947).

Für einen Integritätsbereich \mathfrak{R} mit Idealen g, h, j, m, \dots und Maximalbedingung für die Ideale definiert Verf. in Ausdehnung früherer Begriffsbildungen (dies. Zbl. **30**, 12) ein Ideal g relativ-primär zu h bez. j (Schreibweise: $\{g; h, j\}$), wenn aus $m g \subseteq h$ stets $m \subseteq j$ folgt. Dann gilt: 1. Die Bezugsideale j müssen stets $h \subseteq j$ erfüllen. 2. Bei $g \subseteq g^*, j \subseteq j^*, h^* \subseteq h$ folgt aus $\{g; h, j\}$ stets $\{g^*; h^*, j^*\}$. 3. Bei $g = g_1 \cap g_2, h = h_1 \cap h_2, j = j_1 \cap j_2$ folgt aus $\{g_i; h_i, j_i\}$ ($i = 1, 2$) auch $\{g; h, j\}$. Ordnet man nun von vornherein jedem Ideal h aus \mathfrak{R} ein Bezugsideal $j = f(h)$ derart zu, daß a) bei $h = h_1 \cap h_2, j_i = f(h_i)$ ($i = 1, 2$) stets $j = f(h) = j_1 \cap j_2$ wird, b) bei $h = h_1 \cap \dots \cap h_n$ mit $h_i \neq h_k$ für $i \neq k$ stets $j_i = f(h_i) \neq j_k = f(h_k)$ ausfällt und c) bei $h_i = j_1 \cap \dots \cap j_{i-1} \cap j_{i+1} \cap \dots \cap j_n \subseteq j_i$ immer $\alpha_i = h_1 \cap \dots \cap h_{i-1} \cap h_{i+1} \cap \dots \cap h_n$ relativ-prim zu j_i , also $j_i : \alpha_i = j_i$ oder $\{\alpha_i; j_i, j_i\}$ gilt, so wird $j = f(h) = j_1 \cap \dots \cap j_n$. Wird diese Darstellung $j = j_1 \cap \dots \cap j_n$ auf eine kürzeste $j = j_1 \cap \dots \cap j_r$ ($r \leq n$) mit $j_i = f(h_i)$ ($i = 1, \dots, r$) reduziert, so hat man schließlich 4. $\{g; h, j\}$ dann und nur dann, wenn $\{g; h_i, j_i\}$ für $i = 1, \dots, r$. — Die genannten Voraussetzungen a) bis c) sind in der allgemeinen Idealtheorie durch Auswahl geeigneter Durchschnittsdarstellungen für die Ideale h auf verschiedene Weise zu realisieren. Dadurch ergibt die Anwendung von 4. sowohl das Hauptresultat der eingangs zitierten Arbeit des Verf. von neuem wie auch die Aussage, daß dann und nur dann g relativ-primär zu h bez. $j = f(h) = (h^{-1})^{-1}$ wird, wenn g zu $(h^{-1})^{-1}$ relativ-prim ausfällt; für ein Ideal c aus \mathfrak{R} ist dabei c^{-1} als der im Quotientenkörper $Q(\mathfrak{R})$ von \mathfrak{R} genommene \mathfrak{R} -Modulquotient $c^{-1} = \mathfrak{R}/c$ definiert. — Vgl. auch dies. Zbl. **34**, 309, wo eine andere Erweiterung des Begriffs „relativ-prim“ behandelt wird.

Grell (Berlin).

Andrunakievič, V.: Halbradikale und radikale Ringe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **55**, 3—5 (1947) [Russisch].

Die Arbeit enthält einen Teil der Resultate, die in einer späteren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **29**, 248) ausführlich begründet werden. *R. Kochendörffer* (Rostock).

Jacobson, N.: A note on division rings. Amer. J. Math. **69**, 27—36 (1947).

Es sei P ein (im allgemeinen nichtkommutativer) Körper, Φ ein Unterkörper von P von endlichem Linksindex. P kann als Linksvektorraum über Φ aufgefaßt werden. Es sei \mathcal{Q} der Ring der linearen Transformationen von P über der Menge Φ_l der Linksprodukte $\xi \rightarrow \xi \alpha_l = \alpha \xi$ ($\xi \in P, \alpha \in \Phi$). $A \in \mathcal{Q}$ bedeutet also, daß A ein Endomorphismus der additiven Gruppe von P ist und $(\alpha \xi) A = \alpha (\xi A)$ für alle $\alpha \in \Phi, \xi \in P$ gilt. \mathcal{Q} enthält die Menge P_r der Rechtsprodukte $\xi \rightarrow \xi \varrho_r = \xi \varrho$. Wegen $1 \in P_r$ kann \mathcal{Q} als Rechtsvektorraum über P_r betrachtet werden. Dann ist der Rechtskörpergrad $(\mathcal{Q}:P_r)_r$ gleich dem Linkskörpergrad $(P:\Phi)_l$. — \mathfrak{A} sei ein Endomorphismenring bezüglich der additiven Gruppe von P , welcher P_r enthält und für den $(\mathfrak{A}:P_r)_r = m < \infty$ ist. Ist C ein mit jedem $A \in \mathfrak{A}$ vertauschbarer Endomorphismus von P , so ist C ein Linksprodukt $C = \gamma_l$, und die Gesamtheit der γ bildet den Unterkörper Φ der \mathfrak{A} -Invarianten von P . Dann ist auch der Linkskörpergrad $(P:\Phi)_l = m$, und \mathfrak{A} ist gleich dem Ring \mathcal{Q} der linearen Transformationen von P über Φ_l . Umgekehrt gilt: Ist Φ ein Unterkörper von P von endlichem Linksindex und \mathcal{Q} der Ring der linearen Transformationen von P über Φ_l , so ist Φ_l die Gesamtheit der Endomorphismen von P , welche mit allen Endomorphismen aus \mathcal{Q} vertauschbar sind. Beide Resultate geben somit eine eindeutige Zuordnung der

Zwischenkörper $\Psi(P \supset \Psi \supset \Phi)$ zu den Ringen $\mathfrak{B}(\Omega \supset \mathfrak{B} \supset P_r)$. Die Ergebnisse werden nun auf die Automorphismen von (Schiefe-)Körpern angewendet und führen so zu einer Erweiterung der gewöhnlichen Galoisschen Theorie. — Es sei G eine Automorphismengruppe von P , H ihr Normalteiler der inneren Automorphismen von G . Ein Element $\varphi \in P$ ist eine G -Invariante, wenn für alle $A \in G$ $\varphi A = \varphi$ gilt. G heißt abgeschlossen, wenn mit den inneren Automorphismen I_1 und I_2 ($\xi I_j = \tau_j \xi \tau_j^{-1}$) auch I ($\xi I = \tau \xi \tau^{-1}$ mit $\tau = \tau_1 \gamma_1 + \tau_2 \gamma_2$; γ_i beliebig im Zentrum Γ von P) zu G gehört. Der Unterkörper A von P werde erzeugt von allen $\alpha \in P$, für die die inneren Automorphismen $\xi \rightarrow \alpha \xi \alpha^{-1}$ zu H gehören. Die abgeschlossene Gruppe G heißt von endlicher Ordnung, wenn $(A:\Gamma) = h < \infty$ ist und H von endlichem Index n zu G ist. Das Produkt hn wird reduzierte Ordnung von G genannt. Es gilt dann: 1. G sei eine abgeschlossene Automorphismengruppe von endlicher reduzierter Ordnung im Körper P , Φ sei der Unterkörper der G -Invarianten. Dann ist $(P:\Phi)_l = (P:\Phi)_r = hn$, und jeder Automorphismus von P , welcher Φ invariant läßt, gehört zu G . 2. Jeder abgeschlossenen Untergruppe K von G kann ein Unterkörper $\Psi = P(K)$, dessen Elemente bei jedem $B \in K$ invariant bleiben, zugeordnet werden. Jedem Unterkörper Ψ von P , welcher $\Phi = P(G)$ enthält, läßt sich eine abgeschlossene Untergruppe $K = G(\Psi)$, deren Automorphismen die Elemente von Ψ invariant lassen, zuordnen, und diese Zuordnungen sind eineindeutig. (Man vergleiche mit den Ergebnissen von Henri Cartan, dies. Zbl. 30, 12, 13.)
Reichel (Tübingen).

Nakayama, T.: Semilinear normal basis for quasifields. Amer. J. Math. 71, 241—248 (1949).

Es sei L eine endliche, separable und kommutative galoissche Erweiterung des kommutativen Körpers K . F sei ein Unterkörper von L , der K nicht notwendig zu enthalten braucht. Die Frage nach einer Normalbasis von L über F hinsichtlich K ist vom Verf. in einer früheren Arbeit [Proc. Acad. Tokyo 21, 22 (1945/46)] erschöpfend behandelt worden. Die vorliegende Arbeit untersucht dieselbe Frage im nichtkommutativen Fall. Zu diesem Zweck werden in einem vorbereitenden Paragraphen zunächst einige Hilfssätze über halblineare Gruppenringe über Schiefkörpern und ihre Moduln hergeleitet: (Mit „Körper“ ist stets „Schiefkörper“ gemeint). Ω sei ein Körper und \mathfrak{G} eine endliche Gruppe von Automorphismen von Ω . Ist Φ ein Unterkörper von Ω , der von \mathfrak{G} als Ganzes fest gelassen wird, so bedeute \mathfrak{H} den Normalteiler aus allen $G \in \mathfrak{G}$, die Φ elementweise fest lassen. Die Ordnung von \mathfrak{G} sei g . Verf. betrachtet die halblinearen Gruppenringe $(\mathfrak{G}, \Omega) = G_1 \Omega + \dots + G_g \Omega$ und $(\mathfrak{G}, \Phi) = G_1 \Phi + \dots + G_g \Phi$ mit der Multiplikationsregel $\xi G = G \xi^G$ ($\xi \in \Omega, \Phi$). Die Ordnung von \mathfrak{H} sei h . $(\mathfrak{H}, \Phi) = H_1 \Phi + \dots + H_h \Phi$ ist dann ein gewöhnlicher Gruppenring, und ist Z das Zentrum von Φ , so gilt $(\mathfrak{H}, \Phi) = (\mathfrak{H}, Z) \times \Phi$. Weiter sei n das Radikal von (\mathfrak{H}, Z) und $(\mathfrak{H}, Z)/n = a_1 + \dots + a_k$ eine Zerlegung des Restklassenringes in einfache Ideale. Dann gilt $(\mathfrak{H}, \Phi)/n \Phi = a_1 \Phi + \dots + a_k \Phi$, und $n \Phi$ ist das Radikal von (\mathfrak{H}, Φ) . Ist G_1, \dots, G_t ein Repräsentantensystem mod \mathfrak{H} , so ist

$$(\mathfrak{G}, \Phi) = G_1 (\mathfrak{H}, \Phi) + \dots + G_t (\mathfrak{H}, \Phi),$$

und $m = G_1 n \Phi + \dots + G_t n \Phi$ ist ein zweiseitiges, nilpotentes Ideal in (\mathfrak{G}, Φ) . Bezeichnet nun \mathfrak{F}_i die Gesamtheit aller Elemente $G \in \mathfrak{G}$, die a_i auf sich selbst abbilden, so zeigt Verf., daß m sogar das Radikal von (\mathfrak{G}, Φ) ist, unter der folgenden Voraussetzung: „(I₀) Alle Restklassen von $\mathfrak{F}_i/\mathfrak{H}$ (ausgenommen die 1-Klasse) erzeugen äußere Automorphismen von Φ “. Für Moduln über (\mathfrak{G}, Φ) bzw. (\mathfrak{H}, Φ) ergeben sich anschließend folgende Resultate: \mathfrak{s} und \mathfrak{r} seien zwei (\mathfrak{G}, Φ) -Rechtsmoduln; \mathfrak{s} sei direkte Summe von (\mathfrak{H}, Φ) -Untermoduln, die (\mathfrak{H}, Φ) -isomorph sind zu direkt-unzerlegbaren Rechtsidealkomponenten einer direkten Zerlegung von (\mathfrak{G}, Φ) . Dann gilt: Sind \mathfrak{s} und \mathfrak{r} (\mathfrak{H}, Φ) -isomorph, so sind sie auch (\mathfrak{G}, Φ) -isomorph. Ist \mathfrak{r} direkter Summand von \mathfrak{s} als (\mathfrak{H}, Φ) -Modul, so auch als (\mathfrak{G}, Φ) -Modul. Die Anwendung dieser Ergebnisse führt im nächsten Paragraphen unmittelbar zum Ziel. Neben der Voraussetzung (I₀) oder der stärkeren Voraussetzung (I) „Die Restklassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ (ausgenommen die 1-Klasse) erzeugen äußere Automorphismen von Φ “ wird noch die Voraussetzung (II) „Die Automorphismen aus \mathfrak{H} (ausgenommen 1 $\in \mathfrak{H}$) sind äußere Automorphismen von Ω “ gemacht. Dann gilt der folgende Hauptsatz: Ist $g \leq (\Omega:\Phi)_r$, so gibt es ein $\xi \in \Omega$, so daß die Elemente $\xi^{G_1}, \dots, \xi^{G_g}$ rechts-linear unabhängig sind über Φ . Ist andererseits $g \geq (\Omega:\Phi)_r$, so gibt es ein $\xi \in \Omega$ derart, daß geeignete $\Omega:\Phi$ -Elemente aus dem System $\xi^{G_1}, \dots, \xi^{G_g}$ eine Rechtsbasis von Ω über Φ bilden. Ist $(\Omega:\Phi)$ endlich und gleich $qg + v$ ($0 \leq v < g$), so gibt genau: Es gibt q Elemente $\xi_i \in \Omega$ ($i = 1, \dots, q$) und ein $\eta \in \Omega$, so daß die Elemente $\xi_i^{G_j}$ ($i = 1, \dots, q; j = 1, \dots, g$) und ge-

eignete v unter den Elementen η^{a_j} ($j = 1, \dots, g$) eine Rechtsbasis von Ω über Φ bilden. — Im dritten Paragraphen betrachtet Verf. den speziellen Fall, daß in Ω noch eine Differentiation mit dem bekannten Iterationsgesetz $\binom{v}{\mu} \xi^{(v)} = (\xi^{(\mu)})^{(v-\mu)}$ gegeben ist. Die Elemente $G \in \mathfrak{G}$ sollen mit der Bildung der Ableitungen vertauschbar sein, und Φ sei der Körper aller absoluten Konstanten. Zunächst gilt: Sind $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Omega$ rechts-linear unabhängig über Φ , so gibt es unter den Vektoren $(\xi_1^{(v)}, \dots, \xi_n^{(v)})$ ($v = 1, 2, \dots$) genau n , die links-linear unabhängig über Ω sind. Ist weiter A das Invarianzsystem von \mathfrak{G} in Ω , und macht man wiederum die Voraussetzungen (I) und (II), so gibt es ein $\xi \in \Omega$, unter dessen Ableitungen $k = \text{Max}(g, (\Omega : \Phi)_r)$ so gewählt werden können, daß $\xi^{(v_1)}, \dots, \xi^{(v_k)}$ links-linear unabhängig über A sind. Ist $(\Omega : \Phi)_r \geq g$, und besteht sogar \mathfrak{G} (ausgenommen $1 \in \mathfrak{G}$) aus äußeren Automorphismen von Ω , so ist $k = g$, und $\xi^{(v_1)}, \dots, \xi^{(v_g)}$ bilden eine Linksbasis von Ω über A . Kowalsky (Erlangen).

Hochschild, G.: Double vector spaces over division rings. Amer. J. Math. 71, 443—460 (1949).

Ein (D, E) -Raum ist ein Doppelmodul mit dem Schiefkörper D als Links- und dem Ring E als Rechtsoperatorenbereich. Verf. entwickelt eine Theorie solcher Doppelmoduln im Hinblick auf die Galoissche Theorie für Schiefkörper, wie sie von N. Jacobson und H. Cartan entwickelt wurde. Ist F ein kommutativer Körper, so führt die Untersuchung der (F, F) -Räume auf die von N. Jacobson gegebene Erweiterung der Galoisschen Theorie für nicht-normale und inseparable kommutative Körpererweiterungen. Verf. behandelt die Ausdehnung der dort gewonnenen Ergebnisse auf den nichtkommutativen Fall, die zu der Einführung von relativ-zyklischen (D, E) -Räumen Anlaß gibt. Die Arbeit gliedert sich in sieben Paragraphen folgenden Inhalts: (Mit „Körper“ ist stets „Schiefkörper“ gemeint). § 1: D sei ein Körper. Ist M ein D -Rechtsmodul, so kann M auch aufgefaßt werden als D^* -Linksmodul, wobei D^* aus den Elementen von D , aufgefaßt als Rechtsmultiplikatoren, besteht. Für einen D -Linksmodul A und einen D^* -Links- (also D -Rechts-) Modul B wird das Kroneckerprodukt $B \times A$ durch charakteristische Eigenschaften erklärt. Das Kroneckerprodukt eines (D, E) -Raumes mit einem (E, F) -Raum, wobei D und E Körper sind, ist dann ein (D, F) -Raum. — § 2 befaßt sich mit dem Ring H aller additiven Homomorphismen eines Körpers E in einen Unterkörper D . Dieser Ring ist ein (D^*, E^*) -Raum. Ein Unterring $A \subset H$ heißt komplett, wenn $A \neq (0)$ und selbst ein (D^*, E^*) -Raum ist, wenn also $D^* \cdot A \cdot E^* = A$ ist. Als Hauptergebnis wird ein elementarer Beweis für den folgenden Satz von Jacobson-Bourbaki gegeben: Sei A ein kompletter Unterring des Ringes aller additiven Homomorphismen des Körpers E in den Unterkörper D . K bedeute den Unterkörper aller Elemente aus D , die, aufgefaßt als Linksmultiplikatoren, mit den Elementen von A vertauschbar sind. Hat dann E endlichen Rang über K , oder hat A endliche Dimension über D^* , so gilt $[E : K] = [A : D^*]$, und A stimmt überein mit dem Ring aller K -linearen Abbildungen von E in D . — Ein Körper D heißt normal über dem Unterkörper K , wenn jedes Element von D , das bei allen Automorphismen von D über K fest bleibt, zu K gehört. § 3 gibt Anwendungen und Gesichtspunkte für die Galoissche Theorie von D über K . — § 4 untersucht die Doppelmoduln über normalen Körpern. D und E seien zwei Körper, die beide den Körper K enthalten. Ein (D, E) -Raum V heißt dann K -regulär, wenn V eine Teilmenge V_0 enthält mit $D \cdot V_0 \cdot E = V$ und $k \cdot v_0 = v_0 \cdot k$ für alle $k \in K$ und $v_0 \in V_0$. Gilt $D \supset E \supset K$, und ist g ein Isomorphismus von E in D , so kann mit Hilfe von g in einfacher Weise ein K -regulärer (D, E) -Raum $V(g)$ konstruiert werden. Zwei solche Räume $V(g_1)$ und $V(g_2)$ sind dann und nur dann (D, E) -operatorisomorph, wenn es einen inneren Automorphismus a von D gibt, so daß $g_1 = a \cdot g_2$ ist. Ist D von endlichem Rang und normal über K , und ist E ein Zwischenkörper zwischen D und K , so ist jeder K -reguläre (D, E) -Raum Summe von einfachen K -regulären Unterräumen. Jeder einfache K -reguläre (D, E) -Raum ist (D, E) -operatorisomorph zu einem Raum $V(g)$, wo g einen Automorphismus von D über K bedeutet und g den von g erzeugten Isomorphismus von E . Jeder K -reguläre (D, E) -Raum kann zu einem K -regulären (D, D) -Raum erweitert werden. Ein Körper D von endlichem Rang über K ist dann und nur dann normal über K , wenn jeder unzerlegbare K -reguläre (D, D) -Raum die Dimension 1 über D besitzt. Die Klassen operatorisomorpher, einfacher, K -regulärer (D, D) -Räume bilden hinsichtlich des Kroneckerproduktes eine Gruppe, die isomorph ist zur Gruppe der äußeren Automorphismen von D über K . — § 5 handelt von relativ-zyklischen Moduln. Ein (D, E) -Raum M heißt relativ-zyklisch, wenn es ein $m \in M$ gibt, so daß $M = D \cdot m \cdot E$; als relativ-zyklischer Modul wird M mit (M, m) bezeichnet. Sind (M, m) und (N, n) zwei rel. zykl. (D, E) -Räume, so heißt (N, n) eine Bedeckung von (M, m) , wenn es einen (D, E) -Operatorhomomorphismus von N auf M gibt, der n auf m abbildet. (M, m) und (N, n) heißen äquivalent, wenn jeder den anderen deckt. Jedem rel. zykl. (D, E) -Raum (M, m) kann (bis auf Äquivalenz) umkehrbar eindeutig ein Unterraum des (D^*, E^*) -Raumes H aller additiven Homomorphismen von E in D zugeordnet werden. Dieser Raum ist dann selbst ein (D^*, E^*) -Raum, wird mit $R(M, m)$ bezeichnet und heißt Relationsraum von (M, m) . Es gilt: Ist (M, m) oder $R(M, m)$ von endlicher Dimension über D bzw. D^* , so ist $[M : D] = [R(M, m) : D^*]$. (M, m) bedeckt (N, n) dann und nur dann, wenn $R(M, m) \supset R(N, n)$. Ist $T \subset H$ ein (D^*, E^*) -Unterraum endlicher

Dimension über D^* , so gibt es einen rel. zykl. (D, E) -Raum (M, m) , so daß $R(M, m) = T$ ist. — In § 6 wird für ein beliebiges System rel. zykl. (D, E) -Räume die kleinste gemeinsame Bedeckung definiert und ihre Existenz nachgewiesen. Sind (M, m) und (N, n) rel. zykl. (D, E) -Räume endlicher Dimension über D , und ist (P, p) ihre kleinste gemeinsame Bedeckung, so gilt $R(P, p) = R(M, m) + R(N, n)$. Ist der rel. zykl. (D, E) -Raum (M, m) darstellbar als direkte Summe endlichvieler (D, E) -Unterräume: $M = M_1 + \dots + M_s$, so ist $m = m_1 + \dots + m_s$ mit $m_i \in M_i$ und $M_i = D \cdot m_i \cdot E$. Ein endlich dimensionaler rel. zykl. (D, E) -Raum ist dann und nur dann zerlegbar, wenn sein Relationsraum zerlegbar ist. Die Anzahl der unzerlegbaren Komponenten ist in beiden Fällen dieselbe. — In § 7 schließlich wird das Produkt rel. zykl. Moduln behandelt. C und D seien Körper, (M, m) bzw. (N, n) seien rel. zykl. (C, D) - bzw. (D, E) -Räume. Der Teilraum $(L, m \times n) = C \cdot (m \times n) \cdot E$ des Kroneckerprodukts $M \times N$ heißt das Produkt von (M, m) und (N, n) . Sind M und N von endlicher Dimension über C bzw. D , so gilt $R(L, m \times n) = R(M, m) R(N, n)$. Ist D ein Unterkörper von E , und sind (M, m) und (N, n) zwei rel. zykl. (D, E) -Räume, so bildet man ihr Produkt, indem man den ersten Faktor nur als (D, D) -Raum auffaßt. (M, m) heißt dann abgeschlossen, wenn er sein Produkt mit sich selbst deckt. Ist (M, m) von endlicher Dimension über D , so ist (M, m) dann und nur dann abgeschlossen, wenn $R(M, m)$ ein Ring ist. Bedeutet $K(M, m)$ den Unterkörper von D , der aus allen Elementen $d \in D$ mit $d \cdot m = m \cdot d$ besteht, und ist (M, m) abgeschlossen und von endlicher Dimension über D , so ist $R(M, m)$ der Ring aller $K(M, m)$ -linearen Abbildungen von E in D , und es gilt $[E : K(M, m)] = [M : D]$. Kowalsky (Erlangen).

Brauer, R.: On a theorem of H. Cartan. Bull. Amer. math. Soc. 55, 619—620 (1949).

Der Satz von H. Cartan aus der Galoisschen Theorie für Schiefkörper lautet („Körper“ bedeutet stets „Schiefkörper“): Ist K ein Körper von endlichem Rang über seinem Zentrum C , so gibt es keinen echten Zwischenkörper zwischen C und K , der bei allen inneren Automorphismen von K in sich abgebildet wird. Verf. bemerkt, daß sich dieser Satz in folgender Form ohne Voraussetzungen über den Rang von K über C völlig elementar beweisen läßt: H sei ein Unterkörper von K , der bei allen inneren Automorphismen von K in sich abgebildet wird. Dann gilt entweder $H = K$ oder $H \subseteq C$. Der Beweis wird mit Hilfe einer elementaren Rechnung in wenigen Zeilen geführt. Zum Schluß erwähnt Verf. noch, daß Satz und Beweis in viel allgemeineren Fällen gelten. Nämlich in nicht notwendig assoziativen Ringen, die nur gewisse, geeignete Voraussetzungen erfüllen müssen. Kowalsky (Erlangen).

Hasse, Helmut: Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe. Arch. Math., Karlsruhe 2, 281—294 (1950).

Ausführliche Darstellung in J. reine angew. Math. 187, 14—43 (1950).

Krull, Wolfgang: Die Verzweigungsgruppe in der Galoisschen Theorie der arithmetischen Körper. Arch. Math., Karlsruhe 2, 295—299 (1950).

Ausführliche Darstellung in Math. Ann. 121, 446—466 (1950).

Zahlkörper:

Holzer, L.: Zur Klassenzahl in reinen Zahlkörpern von ungeradem Primzahlgrade. Acta math., København 83, 327—348 (1950).

Sei l eine Primzahl $\neq 2$, m eine ganze rationale Zahl $\neq 1$, R der rationale

Zahlkörper. — Die Klassenzahl von $R(\sqrt[l]{m})$ ist durch l teilbar, wenn m folgende Bedingungen erfüllt: $m^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^2}$ und: zu m gibt es eine ganzrationale Zahl $m' = a^l + l^l b^l$ (a und b ganz-rational, $l \nmid a$) derart, daß die l -Kerne von m und m' dieselben Primteiler haben, und daß mit $m_1 = a + lb$ gilt: $\frac{m'}{m_1} \equiv 1 \pmod{l}$. — Die

Klassengruppe von $R(\sqrt[l]{m})$ hat mindestens z durch l teilbare Invarianten, wenn (m als frei von l -ten Potenzen vorausgesetzt) entweder unter den verschiedenen Primteilern p_i von $m^{\frac{1}{2}(l-1) + z}$ Primzahlen mit $p_i \equiv 1 \pmod{l}$ vorhanden sind oder wenn alle p_i , abgesehen ev. von l , primitive Wurzeln mod. l sind, und i von 1 bis $\frac{1}{2}(l-1) + z$ im Falle $m^{l-1} \not\equiv 1 \pmod{l^2}$ bzw. von 1 bis $\frac{1}{2}(l+1) + z$ im Falle

$m^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^2}$ läuft. — Ein Hilfssatz von allgemeinerer Bedeutung: Wenn im l -ten Kreiskörper k_l eine Hauptidealgruppe existiert, welche $N_{k_l(\sqrt[l]{m})/k_l}((A)) \cdot S_f$ $[(A) = \text{Gruppe der Hauptideale von } k_l(\sqrt[l]{m}), S_f = \text{Strahl nach dem Führer } f \text{ der Idealgruppe für } k_l(\sqrt[l]{m})/k_l]$, dagegen nicht alle Ideale $\neq 0$ aus R enthält, dann ist die Klassenzahl von $R(\sqrt[l]{m})$ durch l teilbar. Grunwald (Hannover).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: bimatrices, représentations bimatriielles des semi-groupes abéliens libres. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 785—787 (1947).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: anneau des représentations d'un groupe; représentations associées du groupe de Galois et du semi-groupe des idéaux. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 973—975 (1947).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: anneau principal; lois d'unicité, d'ordination, d'existence (forme provisoire) d'isophormisme et de décomposition; loi de monodromie. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 1113—1115 (1947).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: conséquences de la loi de monodromie; résumé de la théorie locale. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 535—537 (1948).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: f -extensions; conducteur. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1231—1233 (1948).

Krasner, Marc: Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques: forme définitive de la loi d'existence. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1656—1658 (1948).

In den vorliegenden 6 Noten wird eine Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie für den Fall endlicher galoisscher (aber nicht notwendig abelscher) Erweiterungen skizziert. Um seine Resultate formulieren zu können, führt Verf. eine Anzahl neuer Begriffsbildungen ein. — In der Menge S der Matrizen endlichen Grades über dem komplexen Körper wird die Kroneckersche Addition und Multiplikation betrachtet. Es wird das Element O — die einzige Matrix des Grades 0 — und die Menge der Matrizenpaare $\mathfrak{A} = (A, B)$ — die man Bimatrizen nennt — eingeführt. Eine Matrix A wird mit der Bimatrix (A, O) identifiziert, wodurch S zu einer Untermenge der Menge der Bimatrizen wird. Die Kroneckersche Addition und Multiplikation wird auf die Bimatrizen erweitert. Führt man nun in die Menge der Bimatrizen in natürlicher Weise eine Äquivalenz ein, so bildet die Menge W der Klassen äquivalenter Bimatrizen für diese Operationen einen kommutativen Ring. — Eine freie abelsche Halbgruppe ist eine solche Halbgruppe F , in der jedes Element sich eindeutig als ein Potenzprodukt der Elemente einer Untermenge B von F (B heißt die Basis von F) schreiben läßt. Die Menge der ganzen Ideale eines Zahlkörpers k bildet für die Multiplikation eine freie abelsche Halbgruppe U_k , deren Basis die Menge der Primideale ist. Ist K eine endliche Erweiterung von k , so liefert die Normbildung einen Homomorphismus von U_K in U_k . — Verf. definiert bimatrizielle Darstellungen r einer freien abelschen Halbgruppe F . Das sind gewisse Homomorphismen von F in die multiplikative Halbgruppe vollständig reduzierbarer Bimatrizen [d. h. solcher Bimatrizen, die sich auf die Form (A, B) , wo A und B Diagonalmatrizen sind, bringen lassen]. Eine solche Darstellung ist vollständig bestimmt, wenn die Bilder der Basis von F bekannt sind. Zwei Darstellungen werden als nicht verschieden betrachtet, wenn sie bis auf eine endliche Anzahl der Basiselemente übereinstimmen. Für die bimatriziellen Darstellungen von F wird die Kroneckersche Addition und Multiplikation eingeführt. — In der Menge

der Bimatrizen wird gleichfalls das durch $(A, B) \cdot (A', B') = (A A', B B')$ definierte Produkt betrachtet. Dieses heißt das Matrixprodukt. Ist G eine Gruppe, so definiert Verf. die Darstellungen Γ von G als solche Abbildungen von G in die Menge der Bimatrizen, welche Homomorphismen für die Matrixmultiplikation sind. Äquivalente Darstellungen werden als nicht verschieden betrachtet. Für die Kronecker'sche Addition und Multiplikation bilden die Klassen äquivalenter Darstellungen einer gegebenen Gruppe einen kommutativen Ring. In natürlicher Weise werden die Begriffe wie charakteristische Funktion, Charakter, Zerfällung einer Darstellung usw. eingeführt und diskutiert. — Sei nun k ein Zahlkörper, K eine endliche galoissche Erweiterung von k , $G_{K/k}$ die Galoisgruppe von K/k und $U_{K/k}$ die freie abelsche Halbgruppe der ganzen Ideale von k , die zu der Diskriminante von K/k teilerfremd sind. Sei $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ das Artinsymbol. Ist Γ eine Darstellung von $G_{K/k}$, so heißt die bimatrizen Darstellung r_Γ von U_k , für die für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in U_{K/k}$ $r_\Gamma(\mathfrak{p}) = \Gamma\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)\right)$ ist, die zu Γ assoziierte Darstellung. Durchläuft Γ alle Darstellungen von $G_{K/k}$, so bildet die Menge der assoziierten Darstellungen r_Γ einen Ring, den Verf. den Takagi-Ring $T_{K/k}$ der Erweiterung K/k nennt. Durchläuft K alle endlichen galoisschen Erweiterungen von k , so bilden die Darstellungen von U_k , die allen Darstellungen aller Galoisgruppen $G_{K/k}$ assoziiert sind, ebenfalls einen Ring, den Hauptring R von k . Die Takagischen Unterringe des Hauptringes lassen sich durch innere Eigenschaften kennzeichnen, und sie bestimmen eindeutig die galoisschen Erweiterungen K/k . Die Kenntnis der Struktur eines Takagi-Ringes $T_{K/k}$ gibt weitgehende Auskunft über die Struktur der Galoisgruppe $G_{K/k}$ der entsprechenden Erweiterung. — In den letzten Noten zeigt Verf., wie die Eigenschaften des Hauptringes von k mit den arithmetischen Eigenschaften von k zusammenhängen. Er stützt sich bei diesen Betrachtungen auf eine lokale Körpererweiterungstheorie, die er in den letzten Jahren ausgearbeitet hat. L. Kaloujnine (Berlin).

Zahlentheorie:

Venkataraman, C. S.: A generalisation of Euler's φ function. Math. Student, Madras 17, 34—36 (1950).

The au. proves that $\varphi(M, g)$, defined as the number of positive integers not greater than M and which have a specified divisor g of M as their greatest common divisor with M , is multiplicative in M and obtains its value in terms of the prime factors of M/g . The reviewer remarks that the results obtained follow trivially from the fact that $\varphi(M, g)$, in terms of Euler's totient function, equals $\varphi(M/g)$.

K. G. Ramanathan (Princeton).

Holzer, L.: Minimal solutions of diophantine equations. Canadian J. Math. 2, 238—244 (1950).

Verf. beweist folgenden Satz: Wenn a, b, c ganze, quadratfreie, paarweise teilerfremde Zahlen sind, und wenn $-ab$ quadratischer Rest von c , ac quadratischer Rest von b und bc quadratischer Rest von a ist, dann hat die diophantische Gleichung $ax^2 + by^2 = cz^2$ nichttriviale Lösungen mit $|x| < \sqrt{bc}$, $|y| < \sqrt{ca}$, $|z| < \sqrt{ab}$. — Der Beweis beruht u. a. auf dem folgenden Resultat von E. Hecke [Math. Z. 1, 375 (1918) und 6, 38 (1920); siehe auch H. Hasse, Jber. Deutsche Math.-Verein. 35, 32 (1926)]: Es sei in einem algebraischen Zahlkörper j ein ganzes Ideal und α eine zu j prime ganze Zahl. Dann gibt es unendlich viele Primideale (π) vom ersten Grade, so daß $\pi \equiv \alpha \pmod{j}$. Nagell (Uppsala).

Bell, E. T.: A Pythagorean variation. Scripta math., New York 13, 163—168 (1947).

Sprach man im älteren Schrifttum von einer parametrischen Lösung (p. L.) einer Diophantischen Gleichung (D. G.) gelegentlich als von einer „allgemeinen“, auch wenn sie nicht alle

der D. G. genügenden Wertgesamtheiten umfaßte, so bezeichnet Verf. eine p. L. dann als „vollständig“, wenn sie bei unabhängiger Veränderlichkeit der Parameter in gewissen Vorräten ganzer Zahlen alle jene Wertgesamtheiten liefert. Er gibt hier eine solche vollständige Lösung der D. G.

$$(1) \quad (X^2 - W)^2 + (Y^2 - W)^2 = (Z^2 - W)^2,$$

von der vorher W. P. Whitlock [Scripta math., New York 12, 259–265 (1946)] eine im obigen Sinne allgemeine Lösung angegeben hatte. Verf. zerlegt (1) mit Hilfe der indischen Formeln für Pythagoreische Zahlen in die D. G.

$$(2) \quad W = X^2 - x(y^2 - z^2) = Y^2 - 2xyz = Z^2 - x(y^2 + z^2),$$

$$(3) \quad Z^2 - X^2 = 2xz^2, \quad (4) \quad Z^2 - Y^2 = x(y - z)^2$$

und löst das Gefüge (3), (4), indem er daraus zunächst unabhängig Z , X , x , z und Z , Y , x , y , z bestimmt und die so für Z , x , z gefundenen Werte einander gleichsetzt. Dies führt zu einem anderen, lösbaren Gefüge \mathfrak{G} . Seiner Lösung schickt Verf. Hilfsmittel aus dem Bereiche malwertförmiger Gleichungen wie $xy = zw$ voraus. Bei dem Gefüge

$$(5) \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

scheiden sich der Fall des Ranges 2 und 1 der Matrix ihrer Vorzahlen als reguläre und singuläre Lösung. — Als Lösung von \mathfrak{G} findet Verf.

$$2X = \delta e A C, \quad x = e^2 k p q u, \quad 2Y = \delta e B D, \quad y = \delta(g h C + m n B),$$

$$2Z = \delta e B C, \quad z = \delta g h C, \quad 4W = \delta^2 e^2 [A^2 C^2 - 4k p q u m n B(2g h C + m n B)],$$

wo $e, g, h, k, p, q, m, n, u$ die neun unabhängigen ganzzahligen Parameter sind. Bedeutung der übrigen Zeichen:

$$C = q u m^2 + k p n^2, \quad B = \alpha p q h^2 + \beta k u g^2, \quad E = \alpha p^2 h^2 n^2 - \beta u^2 g^2 m^2,$$

$$D = q u m^2 - k p n^2, \quad A = \alpha p q h^2 - \beta k u g^2.$$

Sind C, B, E nicht sämtlich null, so bedeutet δ ein willkürliches ganzes Vielfaches des Kehrwertes des größten gemeinsamen Teilers von C, B, E ; α, β sind ganze Zahlen mit dem Malwerte 2. — Sind C, B, E alle drei gleich null, so hat (1) nur die selbstverständlichen Lösungen

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = W \quad \text{oder} \quad X = Z = 0, \quad W = Y^2; \quad Y = Z = 0, \quad W = X^2$$

[lies so in (5.13) statt $X = W^2$]. Sie sind der einzige Beitrag eines im Laufe des Verfahrens sich einstellenden singulären Gefüges (5). Koschmieder (Tucumán).

Cassels, J. W. S.: The rational solutions of the diophantine equation $Y^2 = X^3 - D$. Acta math., København 82, 243–273 (1950).

Verf. behandelt die diophantische Gleichung $Y^2 = X^3 - D$ mit der Weilschen Methode und operiert im rein-kubischen Körper $P(\sqrt[3]{D}) = K$. Eine Reihe von notwendigen Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung werden aufgestellt. Es handelt sich um Kongruenzen nach einem Modul, der eine Potenz von einem Primidealdivisor von (2) oder (3) ist. Von den Resultaten sei erwähnt: „Es sei D eine ungerade oder genau durch 4 teilbare, kubenfreie ganze Zahl, die nicht $\equiv \pm 1 \pmod{9}$ ist; es sei ferner die Klassenzahl in K ungerade. Dann haben die beiden Gleichungen $Y^2 = X^3 \pm D$ nicht gleichzeitig nichttriviale Lösungen. Gibt es nichttriviale Lösungen für die eine dieser Gleichungen, so hat die Gruppe der Lösungen genau einen Generator unendlicher Ordnung“. Am Ende folgt eine Tafel über die Lösbarkeit aller Gleichungen mit $|D| \leq 50$; in diesen Fällen gibt es höchstens einen Generator unendlicher Ordnung. Eine andere Tafel gibt Klassenzahl und Einheiten für die selben Werte von D . Theorem IV, S. 246, wurde zuerst von Ref. bewiesen [Skr. Norske Vid. Akad. 1935, No. 1; dies. Zbl. 11, 147]. Nagell (Uppsala).

Zahlen, Jean-Pierre: Sur l'équation diophantienne $X^3 + Y^3 + Z^3 = h T^3$. Euclides, Madrid 9, 139–142 (1949).

Verf. gewinnt für die in der Überschrift genannte Gleichung folgende von drei ganzzahligen Parametern k, m, n abhängige Lösung:

$$X = -27h^3 n^9 + 81h^2 k^3 m^3 n^6 + 27h k^6 m^6 n^3 - k^9 m^9,$$

$$(1) \quad Y = 27h^3 n^9 - 81h^2 k^3 m^3 n^6 + 45h k^6 m^6 n^3 + k^9 m^9,$$

$$Z = 108h^2 k^3 m^3 n^6 - 36h k^6 m^6 n^3, \quad T = 6n(3h k m n^3 + k^4 m^4)^2.$$

Wegen der Art ihrer Herleitung, die klassischen Gedankengängen folgt, sich dabei aber eigener Kunstgriffe bedient, muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Mit

$m - n = 1$ zieht sich (1) auf die vom Verf. schon früher [Interméd. Rech. math. **3**, 105] gefundene einparametrische Lösung

$$X = -27h^3 + 81h^2k^3 + 27hk^6 - k^9, \quad Y = 27h^3 - 81h^2k^3 + 45hk^6 + k^9, \\ Z = 108h^2k^3 - 36hk^6, \quad T = 6(3hk + k^4)^2$$

zurück. — Verf. schließt mit Angabe eines Verfahrens, das aus zwei bekannten Lösungen der vorgelegten Gleichung eine dritte zu finden erlaubt, und eines Weges, auf dem man aus einer bekannten Lösung eine zweite ermittelt. *L. Koschmieder*.

Zahlen, J. P.: Sur les égalités multigrades en nombres tous premiers. *Euclides*, Madrid **9**, 283—286 (1949).

Verf. beweist zwei neue, auf lauter Primzahlen a_i und b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bezügliche Sätze (und ihre Umkehrungen): I. Wenn „die vielgradige Gleichung n -ten Grades“

(1) $a_1, \dots, a_k \stackrel{n}{=} b_1, \dots, b_k$ (d. h. die n Gleichungen $\sum_{i=1}^k a_i^r = \sum_{i=1}^k b_i^r, \quad 1 \leq r \leq n$) mit $k \geq n + 1$ gelten, so bestehen die n Beziehungen

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k \int a_i^r = \sum_{i=1}^k \int b_i^r, \quad 1 \leq r \leq n,$$

wo $\int a_i^r$ die Summe der Teiler von a_i^r bedeutet (wäre nicht $\int (a_i^r)$ vorzuziehen? — Frage des Ref.). — Verf. gewinnt (2), indem er die Gleichungen (1) in geeigneter Weise zusammenzählt und benutzt, daß $\int (a_i^r) = (a_i^{r+1} - 1)/(a_i - 1)$ ist wegen der Primeigenschaft der a_i . (Auf S. 284 ist in Z. 5 wohl „membre à membre“ zu lesen.) — II. Aus (1) folgt

$$(3) \quad \int (a_1), \dots, \int (a_k) \stackrel{n}{=} \int (b_1), \dots, \int (b_k)$$

[Verf. schreibt $(\int a_1)$ usw.]. Er beweist (3) mit Hilfe des Satzes, daß, wenn $A_i = a_i v + u, B_j = b_j v + u$ mit beliebigen ganzen u, v ($1 \leq i, j \leq n$) gesetzt wird, (1) die Beziehung $A_1, \dots, A_k \stackrel{n}{=} B_1, \dots, B_k$ nach sich zieht. — Daß es vielgradige Gleichungen (1) zwischen lauter Primzahlen wirklich gibt, beweisen die vom Verf. herangezogenen Zahlenbeispiele, die A. Moessner (Interméd. Rech. math. **3**, 107; Pythagore **2**, num. 3,2) angegeben hat. — Am Schluß der Arbeit einige offenbleibende Fragen: Sind (1) und (2) [(1) und (3)] dann und nur dann miteinander verträglich, wenn a_i, b_i sämtlich Primzahlen sind? — Gibt es in lauter Primzahlen vielgradige Ketten, und unzählige vielgradige Gleichungen n -ten Grades?

L. Koschmieder (Tucumán).

Segre, Beniamino: Alcune questioni diofantee. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. S. **5**, 33—43 (1950).

Wenn eine elliptische Kurve mit rationalzahliger Gleichung genau 4 und nicht mehr rationale Punkte enthält, so ist, wie bereits Hurwitz (Math. Werke, Basel 1933, **2**, 446—468; dies. Zbl. **7**, 195) bemerkt hat, einer dieser Punkte ein Wendepunkt, während die 3 andern gewöhnliche Punkte sind, die entweder auf einer Geraden liegen können oder nicht. Im zweiten Fall liegt der Wendepunkt mit zweien der übrigen auf einer Geraden und ist Tangentialpunkt des dritten. Bei passender Wahl des Koordinatensystems lautet dann die Gleichung der Kurve: $x(x+z)(y+z) + ay^2z = 0$. Für $a = -1/4$ (Hurwitz) und $a = -1/8$ (B. Levi) enthält die Kurve keine rationalen Punkte außer den Punkten $(0, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ und dem Wendepunkt $(1, 0, 0)$. Verf. beweist, daß dies auch für $a = -1/12$ der Fall ist, indem er durch die Substitution $u = z, v = y + z, w = (2x + z)(y + z)$ zur Gleichung $uv(u^2 + uv + v^2) = 3w^2$ übergeht und zeigt, daß diese keine ganzzahligen Lösungen $u > 0, v > 0, uv > 1, (u, v) = 1$ besitzt. — Verf. wendet diesen Satz an, um zu zeigen, daß das diophantische Gleichungssystem $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2, x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3 = x_3^3 + y_3^3$ keine nicht

trivialen Lösungen besitzt. Die durch diese Gleichungen dargestellte Kurve der Ordnung 36 zerfällt nämlich in 4 Geraden, z. B. die Gerade $x_1 - x_2 = x_3$, $y_1 = y_2 = y_3$, welche die trivialen Lösungen enthalten, ferner in 6 Kurven 4. Ordnung, z. B. die Kurve $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$, $x_1 - x_3 = y_1 - y_3 = 0$, welche auf eine Kubik der oben untersuchten Art projiziert werden kann und daher außer 4 trivialen Punkten keine weiteren rationalen Punkte enthält, und endlich in eine restliche Kurve 8. Ordnung, von der man leicht zeigen kann, daß kein rationaler Punkt auf ihr liegt. Gröbner (Innsbruck).

Gatteschi, L. e L. A. Rosati: Risposta ad una questione proposta da A. Moessner. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 43—48 (1950).

Verff. beweisen, daß das System

$$A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2 = A_3^2 + B_3^2, \quad A_1^3 + B_1^3 = A_2^3 + B_2^3 = A_3^3 + B_3^3,$$

wo (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) drei Zahlenpaare sind, deren keines aus dem andern durch Permutation hervorgeht, keine reellen Lösungen hat. Weiter gilt: Das weniger erfordernde System $A_1^2 + B_1^2 = A_2^2 + B_2^2$, $A_1^3 + B_1^3 = A_2^3 + B_2^3$ hat keine Lösungen in ganzen Zahlen. Holzer (Graz).

Wright, E. M.: Equal sums of like powers. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. 8, 138—142 (1949).

Verf. gibt für die von D. H. Lehmer (dies. Zbl. 29, 110) gefundenen Sätze vereinfachte Beweise. Er zeigt weiter den Aufbau fortlaufender Gleichungen zwischen 2^m m -dimensionalen Vektoren $a_{1,i} \stackrel{k}{\sim} a_{2,i} \stackrel{k}{\sim} \dots \stackrel{k}{\sim} a_{2^m,i}$, wenn eine Lösung des Tarry-Escott-Problems $b_i \stackrel{k}{\sim} b'_i$ mit b_i und b'_i als j -dimensionalen Vektoren gegeben ist. Holzer (Graz).

Lahiri, D. B.: On Ramanujan's function $\tau(n)$ and the divisor function $\sigma_k(n)$. II. Bull. Calcutta math. Soc. 39, 33—52 (1947).

Vandiver, H. S.: On a generalization of a Jacobi exponential sum associated with cyclotomy. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 144—151 (1950).

Es handelt sich um die von A. Weil (dies. Zbl. 32, 394) eingeführten Charaktersummen $\pi(\chi_1, \dots, \chi_s) = \sum_{x_1 + \dots + x_s = 1} \chi_1(x_1) \dots \chi_s(x_s)$, wo χ_1, \dots, χ_s Charaktere der Multiplikationsgruppe eines endlichen Körpers Ω sind und x_1, \dots, x_r in Ω laufen [wobei allgemein $\chi(0) = 1$ oder 0 zu verstehen ist, je nachdem $\chi = \varepsilon$ der Hauptcharakter ist oder nicht]. Verf. bevorzugt statt dieser klaren und einfachen Schreibweise die auf die explizite Definition der Charaktere (mittels Primitivwurzel und Indexfunktion) zurückgreifende formal kompliziertere Schreibweise; er rechtfertigt dies durch Hinweis auf ältere Autoren (Cauchy, Kummer, Kronecker, H. Weber, P. Bachmann, Mertens, Landau). Er diskutiert breit triviale Fragen der Schreibweise und Normierung (z. B. Ersetzung von 1 durch -1 in der Summationsbedingung) und beweist durch längere explizite Rechnung die bei der Charakterschreibweise ohne weiteres auf der Hand liegende Tatsache, daß $\pi(\chi_1, \dots, \chi_s)$ bei den Automorphismen von Ω (Potenzierung mit der Charakteristik) invariant ist. Zum Schluß bemerkt er, daß die von A. Weil bewiesene Betragformel für diese Summen auch in dem etwas allgemeineren Sinne gilt, daß die Werte der Charaktere von Ω stets als $(q-1)$ -te Einheitswurzeln als Elemente des Restklassenrings mod. $x^{q-1} + \dots + x + 1$ verstanden werden (q die Elementanzahl von Ω). Hasse.

Chowla, S.: A new proof of a theorem of Siegel. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 120—122 (1950).

The au. gives a simple proof of Siegel's Theorem, [Acta arithmetica 1, 83—86 (1935); this Zbl. 11, 9] that if χ is a real primitive character mod k and $\varepsilon > 0$ then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} > k^{-\varepsilon}. \quad \text{See also T. Estermann (this Zbl. 34, 313).} \quad K. G. Ramanathan.$$

Bruijn, N. G. de: On the number of uncanceled elements in the sieve of Eratosthenes. Proc. Akad. Wet., Amsterdam **53**, 803—812; Indag. math., Amsterdam **12**, 247—256 (1950).

Let $2 \leq y < x$. Let $\Phi(x, y)$ denote the number of positive integers $\leq x$ which have no prime factors $< y$ and let $\Phi(x, y) = x \prod_{p < y} (1 - 1/p) \psi(x, y)$. It was proved by Buchštab (this Zbl. **33**, 163) that, for a fixed u , we have $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y^u, y) = \omega(u) e^\gamma$, where $\omega(u)$ is defined to be u^{-1} for $1 \leq u \leq 2$ and $d(u \omega(u))/du = \omega(u-1)$ for $u \geq 2$. The author proved that $\lim_{u \rightarrow \infty} \omega(u) = e^{-\gamma}$ and gave a closer investigation

about $Q(y) = \psi(y^u, y) - 1$. He obtained the following uniform bound, namely, there is a positive constant a such that $|Q(y)| < C e^{-au}$. For partial ranges, he obtained the following more precise results: (1) for large u , $|Q(y)| < C 2^y / y^u \log y$, (2) for small u , $|Q(y)| < C \Gamma^{-1}(u) + C R(y)$, where $R(y)$ is a positive function satisfying $R(y) \downarrow 0$ for $y \rightarrow \infty$, $R(y) > y^{-1}$ and $|\pi(y) - \text{li } y| < y R(y) / \log y$ and $\int_y^\infty |\pi(t) - \text{li } t| t^{-2} dt < R(y)$; (3) for $1 \leq u \leq 4y^{1/2} / \log y$,

$$|Q(y)| < C \log^3 y e^{-u \log u - u \log \log u + Cu},$$

and (4) for $u > 4y^{1/2} / \log y$, $|Q(y)| < C e^{-\frac{1}{2} u \log u}$. L. K. Hua (Peking).

Selberg, Sigmund: An asymptotic formula for the distribution of the two-factorial integers. 10. Skand. Mat. Kongr. København 1946, 59—64 (1947).

Es seien p und q beliebige Primzahlen, und es bezeichne $\pi_2(x)$ die Anzahl der Produkte pq mit $pq \leq x$. E. Landau hat die Gaußsche Vermutung $\pi_2(x) \sim \frac{x}{\ln x} \ln \ln x$ bewiesen, und Verf. hat später die folgende Verschärfung dieser Abschätzung gegeben

$$\frac{\pi_2(x)}{x/\ln x} = \ln \ln x + B + O(1),$$

wo B eine näher angegebene Konstante ist. Später hat S. M. Shah die folgende verschärfte Abschätzung gegeben

$$\begin{aligned} \frac{\pi_2(x)}{x/\ln x} &= \ln \ln x + a_1 + \frac{\ln \ln x + a_2}{\ln x} \\ &+ \frac{2! \ln \ln x + a_3}{(\ln x)^2} + \dots + \frac{(r-1)! \ln \ln x + a_r}{(\ln x)^{r-1}} + O\left(\frac{\ln \ln x}{(\ln x)^r}\right), \end{aligned}$$

wo a_1, \dots, a_r Konstante sind. Sein Beweis ist aber nicht richtig. Verf. gibt nun unter Benützung der ζ -Funktion nach einer Landauschen Methode einen korrekten Beweis der letzten Relation. Für die Anzahl der Produkte $p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ nicht größer als x mit festen Exponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ kann eine entsprechende Abschätzung nach demselben Verfahren gegeben werden.

Bergström (Göteborg).

Kuipers, L.: Prime-representing functions. Proc. Akad. Wet., Amsterdam **53**, 309—310; Indag. math., Amsterdam **12**, 57—58 (1950).

Verf. beweist: Falls $c \text{ ganz} \geq 3$ ist, gibt es eine nur von c abhängige reelle Zahl A derart, daß die größte in Ae^x enthaltene ganze Zahl für jedes positive ganze x eine Primzahl ist. — Der Spezialfall $c = 3$ dieses Satzes wurde von W. H. Mills bewiesen (dies. Zbl. **33**, 163).

H. D. Kloosterman (Leiden).

Rankin, R. A.: The difference between consecutive prime numbers. III. J. London math. Soc. **22**, 226—230 (1947).

Ist p_n die n -te Primzahl, $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n}$, so gilt, unter Benützung der allgemeinen Riemannschen Vermutung, die Abschätzung $l \leq 3/5$ [R. A. Rankin, Proc. Cambridge phil. Soc. **36**, 255—266 (1940); dies. Zbl. **25**, 307]. Erdős [dies. Zbl. **23**, 298] zeigt ohne Benützung der R. V. die Existenz eines c mit $l \leq c < 1$.

Verf. zeigt nun, unter Verwendung von Resultaten von A. Buchstab (vgl. dies. Zbl. 22, 113 und 24, 293), ohne Benützung der R. V., daß $l < 57/59$. *Hlawka* (Wien).

Steuerwald, Rudolf: Über die Perioden regelmäßiger Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen. *Math. Z.*, Berlin 52, 686—697 (1950).

This paper is concerned with a generalization of the considerations on expansions for the square roots of whole numbers (i. e., whole rational numbers) (cf. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig 1929, pp. 96—115) into continued fractions with culminate and peneculminate periods. Let D be a positive whole number, not a perfect square, and consider the periodic continued fraction expansion

$$(1) \quad \xi_0 = \sqrt{D} = [\overline{b_0, b_1, \dots, b_{r-1}, b_r, b_{r-1}, \dots, b_1, 2b_0}].$$

Let

$$(2) \quad \xi_v = \frac{\sqrt{D} + P_v}{Q_v} = [b_v, b_{v+1}, \dots] \quad (v = 0, 1, \dots)$$

be the quotients of the continued fractions (1), $A_{\mu,v}$ and $B_{\mu,v}$ the numerators and denominators of the μ -th approximants of ξ_v , $A_{\mu,0} = A_\mu$, $B_{\mu,0} = B_\mu$. For $v = r$

$$(3) \quad 2P_r = b_r Q_r = 2(b_0 - c_r), \quad Q_r \geq 1, \quad 0 \leq c_r \leq Q_r - 1.$$

Conversely, given three whole numbers r , Q , c , which satisfy the conditions (4) $r \geq 1$, $Q \geq 1$, $0 \leq c \leq Q - 1$, the determination of positive whole numbers b_v ($v = 0, 1, \dots, r$) and D so that equations (1) to (3) hold with $Q_r = Q$ and $c_r = c$ is considered. The method is a generalization of that for the cases $Q = 1, 2$ considered by Perron (op. cit., pp. 96ff., 110ff.). The partial denominators b_1, \dots, b_{r-1} of (1) must satisfy the equation

$$(5) \quad c A_{r-2,1} + B_{r-2,1} = Q A_{r-3,1},$$

and are called a „solution“ of this equation. It is shown that for $r \geq 3$ there always exist solutions if $c = 0$ or is a factor of $Q - 1$. Properties of the solutions are discussed. *Frank* (Chicago, Ill.).

Tietze, Heinrich: Über real—statt formal—festgelegte Kettenalgorithmen zur simultanen Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse. *S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* 1945/46, 1—43 (1947).

In this study the Euclidean algorithm for the highest common factor of two integers (which also leads to the continued fraction expansion for the ratio of the two integers) is considered both as a successive subtraction process and as a division process. This is geometrically interpreted as successive coordinate transformations in two variables. The generalization for three numbers, due to Poincaré [*Sur une généralisation des fractions continues*, *C. r. Acad. Sci.*, Paris 99, 1014—1016 (1884)], is (as suggested by Poincaré) extended to n positive real numbers a_1, \dots, a_n ($n \geq 2$), $a_1 > a_2 > \dots > a_n$. From these, a new number system $a'_1 = a_1 - a_2, \dots, a'_{n-1} = a_{n-1} - a_n, a'_n = a_n$ is built up, and the process repeated. The case where some of the numbers a_v are equal is also treated. Geometrically, this method leads to a sequence of coordinate transformations in n variables. The process is modified by the successive formation of sets of numbers

$$a'_1 = a_1 - q_1 a_2, \dots, a'_{n-1} = a_{n-1} - q_{n-1} a_n, a'_n = a_n,$$

where q_v is the largest integer less than the quotient a_v/a_{v+1} . Examples are given which illustrate the various methods. *E. Frank* (Chicago, Ill.).

Tietze, Heinrich: Ein Algorithmus von Poincaré und andere Algorithmen zur Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse. *S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* 1945/46, 185—219 (1947).

It is well known that a real number γ may be expanded (by the Euclidean algorithm) into a continued fraction $q + 1/q_1 + 1/q_2 + \dots$ which is finite if γ is rational.

If γ is the square root of an integer and not rational, the continued fraction is periodic and the approximants converge to the number γ . The author has discussed the Poincaré algorithm for the simultaneous approximation of the proportion of $n \geq 2$ real numbers $a_1 : \dots : a_n$ (of which the Euclidean algorithm is a special case for $n = 2$) [preced. rev.]. In the present paper, the author shows in a number of examples that the properties of reduction of the number of terms a_n , periodicity, and convergence (which is shown by a geometric interpretation of the Poincaré algorithm by a sequence of vectors in n -dimensional space), which hold for $n = 2$, do not always generalize to the cases $n > 2$. E. Frank (Chicago, Ill.).

Rédei, L.: Endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes. Acta math., København 84, 155—158 (1950).

Verf. zeigt folgenden Satz 1: Es seien m_1, \dots, m_k natürliche Zahlen, $L_i = L_i(x) = L_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, k$) Funktionen, die für ganze rationale x_j ($j = 1, \dots, n$) ganz rational sind, welche die Eigenschaft haben, daß aus $L_i(x) \equiv L_i(y) \pmod{m_i}$ folgt $L_i(x - y) \equiv 0 \pmod{m_i}$. Ist nun K ein konvexer Körper im R_n mit Mittelpunkt 0 und Volumen $V(K) \geq 2^n m_1 \dots m_k$, dann enthält er einen Gitterpunkt $x \neq 0$, mit $L_i(x) \equiv 0 \pmod{m_i}$ ($i = 1, \dots, k$) (hier bedeutet Gitterpunkt: Punkt mit ganzen rationalen Komponenten, also Punkt des Würfelgitters). Dieser Satz enthält einen Satz von Jarník [Časopis Mat. Fys. 68, 59—60 (1939)]. Daraus folgt sofort ein weiterer Satz. Wir können, wenn p Primzahl, jedem Gitterpunkt $x = (x_1, \dots, x_n)$, wo nicht alle $x_i \equiv 0 \pmod{p}$, eindeutig einen Punkt des $(n-1)$ -dimensionalen projektiven Raumes P_{n-1} über dem Primkörper $K(p)$ zuordnen. Dann gilt (Satz 2): Ist U_r ein r -dimensionaler linearer Unterraum von P_{n-1} , K wieder ein konvexer Körper des R_n mit Mittelpunkt 0, ist $V(K) \geq 2^n p^{n-r-1}$ und enthält K keinen Gitterpunkt $\neq 0$, dessen Koordinaten alle $\equiv 0 \pmod{p}$ sind, dann enthält K einen Gitterpunkt, dem ein Punkt von U_r zugeordnet ist. Dies folgt daraus, daß ja die Punkte x von U_r durch Kongruenzen $L_i(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ($i = 1, \dots, n-r-1$; L_i homogene Linearformen mit ganzzahligen Koeffizienten) definiert werden können. Dann liefert Satz 1 mit $k = n-r-1$, $m_1 = \dots = m_k = p$ das Gewünschte. Für $n = 2$, $r = 0$, K : Quadrat $\max(|x|, |y|) \leq \sqrt{p}$ erhält man einen Satz von Thue (A. Scholz, Einführung in die Zahlentheorie, Berlin 1939, S. 45—46; dies. Zbl. 22, 112). — Verf. hat vom Satz 2 für $n = 2$, $r = 0$ bereits schöne Anwendungen gemacht (dies. Zbl. 35, 26). Ich möchte noch auf Satz 1 eingehen und den Grundgedanken in allgemeinerer Fassung, als es der Verf. tut, herauschälen. Es liege ein beliebiges Gitter G [Gitterpunkte g , Determinante $D(G) \neq 0$] und eine endliche Menge A (Elemente a) von t Elementen vor. Es sei nun G in A so abgebildet ($g \rightarrow a$), so daß, wenn $g_1 \rightarrow a$, $g_2 \rightarrow a$, stets $g_1 - g_2$ auf ein festes Element a_0 von A abgebildet wird (a_0 unabhängig von g_1, g_2). Dann bilden die g mit $g \rightarrow a_0$ eine Untergruppe G_0 von G . Der Index von G/G_0 ist $\leq t$, denn g mit gleichem Bild liegen in der gleichen Restklasse von G_0 . Also ist G_0 ein Gitter und $D(G_0) \leq t D(G)$. Liegt nun eine Aussage $S(G, T)$ über Gitter G vor, abhängig von einem reellen positiven Parameter T , und ist S richtig für alle G mit $D(G) \leq T$, so ist sie bereits richtig für das obige Teilgitter G_0 von G , wenn sogar $D(G) \leq T/t$ ist, denn dann ist $D(G_0) \leq T$. Ist nun z. B. S der Minkowskische Fundamentalsatz: Jeder konvexe Körper K mit Volumen V enthält einen Gitterpunkt $g \neq 0$ von G ; wenn $D(G) \leq V/2^n = T$, so folgt sofort, daß er bereits für G_0 gilt, wenn $D(G) \leq V/2^n t$. Liegt das Würfelgitter mit $D(G) = 1$ vor, so folgt sofort Satz 1. In dieser allgemeinen Fassung enthält er auch einen Satz des Ref., der Satz 1 umfaßt („Bemerkungen zu einem Satz von R. Radó“, Anzeiger Akad. Wiss. Wien 1950). So kann man jedem Satz der Geometrie der Zahlen von obiger Gestalt, wie bei Satz 2, einen zahlentheoretischen Satz zuordnen. Damit erscheint ein neues Anwendungsgebiet der Geometrie der Zahlen eröffnet. Hlawka.

Rogers, C. A.: A note on irreducible star bodies. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 50, 868—872 (1947).

A star body S in n -dimensional space is called irreducible if every star body S' which is a proper subset of S satisfies $\Delta(S') < \Delta(S)$ [see K. Mahler, Proc. Akad. Wet., Amsterdam 49, 334—343 (1946)]. In this note, the au. obtains a necessary and sufficient condition for S to be irreducible. He calls the point $P \in S$ reducible if there exists a star body $S' \subset S$ with $\Delta(S') = \Delta(S)$ which does not contain P ; if no such S' exist, P is irreducible. The following final results are obtained: (1) The star body S is irreducible if, and only if, every boundary point is so. (2) If P is any irreducible point on the boundary of the (reducible or irreducible) star body S , then there exists a critical lattice of S containing P . — All star bodies are assumed symmetrical in O and of the finite type. The methods are essentially those of Mahler.

Mahler (Manchester).

Chalk, J. H. H.: On the frustrum of a sphere. Ann. Math., Princeton, II. S. 52, 199—216 (1950).

Let $0 < \lambda \leq 1$, and let K_λ be the spherical frustrum $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $|z| \leq \lambda$. The author proves that $\Delta(K_\lambda) = \frac{1}{2} \lambda (3 - \lambda)^{\frac{1}{2}}$, and that every critical lattice of K_λ may be obtained by a rotation about the z -axis and reflexions in the coordinate planes from

$$x = v - \frac{1}{2} w, \quad y = \frac{1}{2} w (3 - \lambda)^{\frac{1}{2}}, \quad z = \lambda u + \frac{1}{2} \lambda w \quad (u, v, w = 0, \mp 1, \mp 2, \dots).$$

The rather long proof depends on Minkowski's method (Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1911, Bd. 2, XIX). A simple limiting process leads to the further result that the cylinder $C: x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 1$ has the critical determinant $\Delta(C) = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ [see K. Mahler, Quarterly J. Math. (Oxford Ser.) 42, 16—18 (1946)].

K. Mahler (Manchester).

Analysis.

Allgemeines:

• **Delachet, André:** L'analyse mathématique. Paris: Presses Universitaires de France 1949. 114 S.

Verf. versucht, Nichtmathematikern ein Verständnis für die Probleme und Fragestellungen der modernen Analysis zu vermitteln. Er verfolgt dazu die geschichtliche Entwicklung von den ältesten Zeiten bis zum „mathématicien polycéphale Nicolas Bourbaki“. Vorausgesetzt wird allerdings eine ziemlich gute Kenntnis der Differential- und Integralrechnung und ein nicht unerhebliches Maß mathematischer Denkfähigkeit. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so wird der Leser Gewinn und Freude ernten. Auffällig ist die konsequente Verschreibung Zermelo. Das Buch gliedert sich in folgende Kapitel: I. La période pré-newtonienne. II. L'époque newtonienne. III. Genèse de la notion de fonction. IV. La notion moderne de continuité. V. Le mouvement logistique et le transfini. VI. La crise mathématique au début du XX^e siècle. VII. Les derniers progrès de l'Analyse. — Conclusion: L'avenir de l'Analyse.

Krafft (Marburg).

• **Duschek, Adalbert:** Vorlesungen über höhere Mathematik. I.: Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wien: Springer-Verlag 1949. X, 395 S. mit 167 Textabb., \$ 7.80, geb. \$ 8,70.

Über den Inhalt des vorliegenden Werkes gibt der Titel hinreichend Auskunft. Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die klassische Laplacesche Definition der Wahrscheinlichkeit zugrunde gelegt unter ausdrücklicher Angabe ihrer Mängel. Es ist zu bedauern, daß das für künftige Ingenieure bestimmte Werk in der Schärfe

und Klarheit der Aussagen und Beweise nicht das für Studierende an Universitäten erforderliche Maß erreicht. Als Beleg seien einige Beispiele genannt. Die Definition des Funktionsbegriffes ist so weit gefaßt, daß auch dann eine Funktion vorliegt, wenn jedem zulässigen x alle y zugeordnet werden. Glücklicherweise erfolgt später die Beschränkung auf eindeutige Funktionen. Die obere und untere Grenze einer beschränkten Zahlenmenge werden definiert, über die Existenz der Grenzen fehlt jede Aussage, später aber wird die Existenz benutzt. Der Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit einer im abgeschlossenen Intervall stetigen Funktion ist nur im trivialen Fall einer (abteilungsweise) monotonen stetigen Funktion schlüssig. Limes- und Integralzeichen werden ohne Begründung vertauscht. Ein größeres Maß an Strenge wäre nach Ansicht des Ref. erreichbar gewesen, ohne die Lektüre des Buches zu erschweren und ohne den Benutzern mehr an mathematischer Denkfähigkeit zuzumuten, als es der Verf. ohnehin tut.

Krafft (Marburg).

● **Schleier, E.: Mathematische Formeln und Lehrsätze.** 13., vollst. Neubearb. Aufl. der Formelsammlung „Gruhn-Schleier“. München: Max Hueber Verlag 1949. VIII, 200 S.; 6,80 DM.

Die vorliegende Formelsammlung sucht dem Bedürfnis der Nichtmathematiker zu dienen. Bei solchen Werken wird man darauf verzichten, daß die genauesten Bedingungen für die Gültigkeit der vorgetragenen Sätze und Formeln angegeben werden. Man wird sich mit Bedingungen begnügen, die für den praktischen Gebrauch ausreichen. Daneben wird man Zuverlässigkeit und Korrektheit fordern müssen. Leider erfüllt die vorliegende Formelsammlung hier auch die bescheidensten Anforderungen nicht. Die Zahl der Druckfehler, der mißverständlichen Formulierungen und der falschen Aussagen ist überaus groß.

Krafft (Marburg).

Kalmár, László: Über die Cantorsche Theorie der reellen Zahlen. Publ. Math., Debrecen 1, 150—159 (1950).

Présentation de la construction classique de Cantor qui se rattache à celle de van der Waerden (Moderne Algebra I, Berlin 1937; ce Zbl. 16, 339), mais en accentue encore le caractère algébrique. Le corps des nombres réels est défini comme quotient de l'anneau des suites de Cauchy de nombres rationnels par l'idéal des suites tendant vers 0 (comme chez van der Waerden); mais les suites de Cauchy sont définies par la propriété qu'une telle suite est congrue, modulo l'idéal des suites tendant vers 0, à chacune de ses suites partielles.

J. Dieudonné (Nancy).

Tricomi, Francesco: Sui simboli O ed o e la teoria dei limiti. Rend. Sem. mat., Torino 8, 161—166 (1949).

An Beispielen wird erläutert, daß der Gebrauch der Zeichen O und o für die Formulierung vieler Aussagen zweckmäßiger ist, als der klassische Limeskalkül.

Krafft (Marburg).

Mengenlehre:

● **Alexandroff (Aleksandrov), P. S.: Einführung in die allgemeine Theorie der Mengen und Funktionen.** Moskau-Leningrad: OGIZ, Staatsverlag f. techn.-theor. Lit. 1948. 411 S., R. 9.50 [Russisch].

Das Lehrbuch von P. Alexandroff und Kolmogoroff über reelle Funktionen wird nun von den Verff. zu einem zweibändigen Werk umgearbeitet, von dem der erste Band vorliegt. Inhalt: Kap. 1, Über unendliche Mengen (31 S.), Kap. 2, Reelle Zahlen (23 S.), Kap. 3, Geordnete und wohlgeordnete Mengen, transfinite Zahlen (56 S.), Kap. 4, Mengen auf der Geraden und in der Ebene (47 S.), Kap. 5, Reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen (56 S.), Kap. 6, Punktmengen in metrischen Räumen (61 S.), Anhang: Topologische Räume (25 S.), Kap. 7, Kompakte und vollständige Räume (68 S.), Anhang I: Bikompakte Räume (26 S.), Anhang II: Quasigleichmäßige Konvergenz (6 S.). Das ist immer noch ein elementares Lehrbuch trotz der sehr wesentlichen Erweiterungen im Vergleich zur ersten Form des Buches. Der Gegenstand ist die klassische Mengenlehre, und neuere Dinge (wie z. B. gleichmäßige Räume, Verbände oder das Zornsche Lemma) werden nicht berührt. Der Zweck ist die Mengenlehre an sich, doch auch eine Vorbereitung für den zweiten Band, der der engeren Theorie der reellen Funktionen gewidmet

ist und von Kolmogoroff vorbereitet wird. Das Buch ist sehr klar und einfach geschrieben und geht konzentrisch vor, wie z. B. aus dem Aufbau des topologischen Teiles (Kap. 4 — Kap. 6 und 7 — Anhänge) zu ersehen ist. Kleine Bemerkungen: Satz 18 auf S. 198 ist falsch; auf S. 253—256 sollte auf den Zusammenhang zwischen dem Satz von Weierstraß und der Separabilität des Raumes C hingewiesen werden. G. G. Lorentz (Kingston, Ont.).

● Kamke, E.: *Theory of sets.* — Translated by F. Bagemihl from 2nd German ed. New York: Dover 1950. VIII, 152 p., \$ 2,45.

Denjoy, Arnaud: *Quelques propriétés des ensembles rangés.* Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 187—195 (1949).

Hinweise auf Eigenschaften gestufter Mengen (ensembles rangés), die Verf. in seinem Buch *L'énumération transfinie* (Paris 1946) behandelt hat. Für die angegebenen Eigenschaften vgl. Denjoy (dies. Zbl. **29**, 114). Kamke (Tübingen).

Iseki, Kiyosi: *Sur les ensembles singuliers I. Une proposition équivalente à l'hypothèse du continu.* J. Osaka Inst. Sci. Technology **1**, 3—4 (1949).

Verf. beweist folgenden Satz: Die Annahme $(H) 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ist gleichwertig mit dieser: (P) Man kann das Intervall E der Punkte x mit $0 \leq x \leq 1$ zerlegen in eine Summe disjunkter abzählbarer Teilmengen F derart, daß jede Vereinigung unabzählbar vieler von ihnen mindestens einen Punkt gemein hat mit jeder abzählbaren Menge $G_\delta \subset E$ vom Maße 0. — Verf. zeigt, wie man vermöge (H) eine Zerlegung $E = \bigcup_{\alpha < \Omega} F_\alpha$ herstellen kann, welche der Bedingung (P) entspricht.

Daß umgekehrt auch (H) aus (P) folgt, ergibt sich auf Grund des Umstandes, daß E 2^{\aleph_0} unabzählbare Mengen G_δ vom Maße 0 enthält, die paarweise fremd sind. — Ruziewicz hatte die Frage gestellt: Wenn das Intervall E in disjunkte Punktpaare zerlegt wird, kann man dann immer solche Paare herausgreifen, daß ihre Vereinigungsmenge ein vorgeschriebenes Maß a ($0 < a < 1$) annimmt? Bezüglich einer Zerlegung von E gemäß (P) in abzählbare Mengen F_α ist diese Frage zu verneinen, weil jede Vereinigungsmenge von \aleph_1 Mengen F_α das äußere Maß 1 hat. Verf. behauptet, daß damit die von Ruziewicz aufgeworfene Frage — unter der Annahme $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ — negativ beantwortet sei. [Ref. gesteht, daß ihm die Richtigkeit dieser Behauptung nicht klar ist.] Neumer (Mainz).

Tajmanov, A. D.: *Über Quasikomponenten nicht zusammenhängender Mengen.* Mat. Sbornik, n. S. **25** (67), 367—386 (1949) [Russisch].

Ist \mathcal{L} Teilmenge einer Menge E eines topologischen Raumes, so nennt Verf. die Menge \mathcal{L} zerlegt durch die Menge E , wenn Beziehungen der Form bestehen:

$$E = E_1 + E_2, \quad H(E_1, E_2) = E_1 \cdot E_2 + E_1 \cdot E_2 = 0, \quad E_1 \cdot \mathcal{L} \neq 0 \neq E_2 \cdot \mathcal{L}.$$

Andernfalls heißt \mathcal{L} zusammenhängend in E . Eine in E zusammenhängende maximale Teilmenge E^1 wird 1-Quasi-Komponente von E genannt. Diese 1-Quasikomponenten sind die Quasikomponenten von E im Sinne Hausdorffs. Wenn E nicht zusammenhängend ist, so zerfällt E in eine Summe paarweise fremder, in E abgeschlossener 1-Quasikomponenten. Jeder Punkt $x \in E$ gehört genau einer 1-Quasikomponente $E^1(x)$ an. Jede 1-Quasikomponente, die nicht zusammenhängend ist, zerfällt wieder in 1-Quasikomponenten, die 2-Quasikomponenten von E genannt werden. Mittels transfiniter Induktion kann man α -Quasikomponenten E^α vom transfiniten Index α bestimmen, wobei für Limeszahlen α gilt: $E^\alpha(x) = \prod_{\beta < \alpha} E^\beta(x)$;

E ist dann die Summe aller seiner α -Quasikomponenten: $E = \sum_{x \in E} E^\alpha(x)$; diese

sind paarweise fremd, in E abgeschlossen und in E zusammenhängend. Für einen festen Punkt $x \in E$ muß die Folge $E^1(x) \supset \dots \supset E^\alpha(x) \supset \dots$ bei einem bestimmten Index β abbrechen, insofern $E^\beta(x) = E^{\beta+1}(x) = E(x)$ die Komponente von E wird, in der x liegt; β heißt der Index von x und seiner Komponente $E(x)$. Wenn der betr. topologische Raum eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, ist β abzählbar, also $\beta < \Omega$. Für Mengen mit transfiniten Indizes ihrer Punkte und (Quasi-)Kompo-

nenten werden Beispiele gegeben aus dem R^2 und R^3 . — Die folgenden Betrachtungen führt Verf. im R^n durch, bemerkt aber in der Einleitung vorliegender Abhandlung, daß die Ergebnisse in beliebigen separablen metrischen Räumen gelten. Es erhebt sich die Frage nach der Mächtigkeit der Mengen K_E^β resp. K_E der β -Quasikomponenten resp. Komponenten von E . (Die Mächtigkeit einer Menge N wird vom Verf. mit $m(N)$ bezeichnet.) P. S. Novikov hatte (nach Angabe des Verf.) die Frage der Mächtigkeit von K_E gelöst für den Fall, daß E eine A -Menge ist. Verf. zeigt, daß bei einer A -Menge E für jedes $\beta < \Omega$ $m(K_E^\beta) = \aleph$ oder $m(K_E^\beta) \leq \aleph_0$ ist. [\aleph bezeichne die Mächtigkeit des Kontinuums. Ref.] Wenn einmal $m(K_E^\beta) = \aleph$ wird, so wird auch $m(K_E) = \aleph$, und wenn alle $m(K_E^\beta) \leq \aleph_0$ bleiben, so ist nach Novikov $m(K_E) = \aleph$, wie Verf. bemerkt. [Diese Bemerkung dürfte ein Versehen sein, und vermutlich hatte für diesen Fall Novikov bewiesen, daß $m(K_E) \leq \aleph_0$ ist. Wendet man die nachstehend skizzierte Schlußweise des Verf. auf eine A -Menge an, so ergibt sich bei dem in Rede stehenden Fall $m(K_E) \leq \aleph_1$. Ref.] — Wenn E in eine Summe von \aleph_1 A -Mengen \mathcal{C}_γ zerlegbar ist: $E = \sum_{\gamma < \Omega} \mathcal{C}_\gamma$.

dann gilt für $\beta < \Omega$: $m(K_E^\beta) = \aleph$ oder $m(K_E^\beta) \leq \aleph_1$. Ist also einmal $m(K_E^\beta) = \aleph$, so muß $m(K_E) = \aleph$ sein. Ist aber stets $m(K_E^\beta) \leq \aleph_1$, dann hat auch die Menge L_E^β der Komponenten vom Index β als Untermenge von K_E^β eine Mächtigkeit $\leq \aleph_1$, und daraus folgt $m(K_E) \leq \aleph_1$. — Anschließend werden die Sätze bewiesen: Aus der Existenz einer effektiven Menge mit \aleph_1 α -Quasikomponenten folgt die Existenz einer effektiven Menge aus \aleph_1 Punkten. — Ist E ein F_σ , so ist die Menge seiner punktwisen 1-Quasikomponenten eine B -Menge. — Zum Schluß beweist Verf. u. a., daß die Eigenschaft einer Menge, Quasikomponente einer anderen Menge zu sein, keine topologische Invariante ist. Ferner findet er als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine ebene Menge \mathcal{C} die 1-Quasikomponente einer anderen ebenen Menge \mathcal{C}' ist: \mathcal{C} wird nicht zerlegt durch die Menge $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{C}$.
Neumer (Mainz).

Wendelin, H.: Zwei Verästelungssätze. J. reine angew. Math. 187, 231—233 (1950).

Wenn alle r natürliche Zahlen sind und λ_1 zur Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ und λ_q zur Menge $\{1, 2, \dots, r_{\lambda_1 \dots \lambda_{q-1}}\}$ für $q = 2, 3, \dots$ gehört, so soll das System τ von Mengen $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{r_0}, \mathfrak{M}_{11}, \dots, \mathfrak{M}_{1\tau_1}, \mathfrak{M}_{21}, \dots, \mathfrak{M}_{r_0 1}, \dots, \mathfrak{M}_{r_0 \tau_{r_0}}, \dots, \mathfrak{M}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_q}$ eine Mengenverästelung heißen. Für $q = 0$ sei $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \dots \lambda_q} = \mathfrak{M}$. Für festes r sei d_r das Maximum der Durchmesser aller $\mathfrak{M}_{\sigma_1 \dots \sigma_r}$, wobei alle Mengen Punktmengen eines metrischen n -dimensionalen Raumes sind. Jede Menge $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \dots \lambda_r \lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+t}}$ aus τ soll Nachfolger von $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ heißen ($r \geq 0$; $t > 0$). Eine Mengenverästelung τ soll ausgezeichnet heißen, wenn $\lim_{r \rightarrow \infty} d_r = 0$ und jeder Nachfolger Teilmenge seiner

Vorgänger ist. Auf dieser Grundlage läßt sich der folgende Satz beweisen: „In der abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} sei die reelle Funktion $f(P)$ definiert. Es sei τ eine ausgezeichnete Mengenverästelung, wobei alle Mengen $\mathfrak{M}_{\sigma_1 \dots \sigma_r}$ abgeschlossen seien. Für unendlich viele r mögen zu gegebenem $\eta > 0$ Mengen $\mathfrak{M}_{\sigma_1 \dots \sigma_r}$ in τ existieren, in denen die Schwankung $s(f; \mathfrak{M}_{\sigma_1 \dots \sigma_r})$ von $f(P)$ nicht kleiner als η ist. Dann gibt es in \mathfrak{M} mindestens einen Punkt Q , in dem die Punktschwankung $\sigma(f; Q)$ von f nicht kleiner als η ist“. Auch der Bolzano-Weierstraßsche Häufungsstellensatz läßt sich auf dieser Grundlage beweisen.
Göllnitz (Chemnitz).

Kappos, Demetrios A.: Über einen Satz der Theorie der Baireschen Funktionen und Borelschen Mengen. Math. Ann., Berlin 122, 1—5 (1950).

Es sei V ein bedingter (σ, δ) -Verband, d. h. in V sei die σ - bzw. δ -Operation

für die in V beschränkten Folgen von Elementen immer ausführbar. Dann sagt man, daß die beschränkte Folge x_1, x_2, \dots aus V gegen $x \in V$ konvergiert, wenn $x = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \bigcap_{\varrho=0}^{\infty} x_{\nu+\varrho} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \bigcap_{\varrho=0}^{\infty} x_{\nu+\varrho}$ gilt. Man nennt V topologisch, wenn aus der Konvergenz von $\{a_n\}$ gegen a und von $\{b_n\}$ gegen b die Konvergenz von $a_n \cup b_n$ bzw. $a_n \cap b_n$ gegen $a \cup b$ bzw. $a \cap b$ folgt. Ist W ein Unterverband von V , so bezeichnen wir mit $W_\lambda, W_\sigma, W_\delta$ die Teilmengen von V , die aus W durch Adjunktion der Limiten konvergenter Folgen aus W , der Vereinigungen von Folgen aus W , der Durchschnitte von Folgen aus W entstehen. Es gilt der Satz: Es sei V ein topologischer, bedingter (σ, δ) -Verband und W ein Unterverband von V . Dann ist $W_\lambda = W_{\sigma\delta} \cap W_{\delta\sigma}$. — Ist V ein Verband von Mengen bzw. reellen Funktionen, so ergibt sich daraus ein wohlbekannter und wichtiger Satz über Borelsche bzw. Bairesche Klassen. Császár (Budapest).

Levi, F. W.: On frequencies and semicontinuous functions. Canadian J. Math. 2, 32—43 (1950).

Verf. nennt die Eigenschaft F , die jede Teilmenge einer Menge Σ besitzen kann oder nicht, eine „Frequency“, wenn sie folgenden Bedingungen genügt: (1) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ besitzt F dann und nur dann, wenn mindestens ein A_n sie besitzt. (2) Die leere Menge besitzt F nicht. (3) Σ besitzt F . Einige Eigenschaften der „Frequencies“ werden untersucht. Ist nun Σ ein topologischer Raum mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, so definiert Verf. die „obere Schrankenfunktion mod F “ $f_1(x)$ der in Σ definierten reellen Funktion $f(x)$ durch das Supremum aller Werte k , für welche der Durchschnitt jeder Umgebung von x und der Menge aller Punkte x' mit $f(x') > k - \varepsilon$ bei $\varepsilon > 0$ die Eigenschaft F besitzt. Ähnlich wird die „untere Schrankenfunktion mod F “ $f_2(x)$ erklärt. Mit Hilfe dieser Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ werden „halbstetige Funktionen mod F “ definiert und ihre Eigenschaften untersucht. Császár (Budapest).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

• **Grüß, Gerhard:** Differential- und Integralrechnung. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 21.) Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1949. XVI, 642 S. u. 355 Abb., DM 39.—.

Das schöne Buch enthält die Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen. Es besitzt in der Vortragsweise ein charakteristisches eigenes Gepräge. Die Sorgfalt in Gliederung und Beweisführung ist vorbildlich, ebenso das Eingehen auf viele Einzelheiten, über die Anfänger zu stolpern pflegen. Neben dem üblichen Stoff werden die wichtigsten Verfahrungsweisen der praktischen Analysis, wie Interpolation und numerische, graphische und instrumentelle Differentiation und Integration vorgetragen. Neue Begriffe werden oft durch Beispiele ihres Auftretens in den Anwendungen erläutert. Es wäre bedauerlich, wenn der vorzeitige Tod des Verf. das Erscheinen des zweiten, den Funktionen mehrerer Veränderlichen gewidmeten Bandes verhindern würde. Krafft (Marburg).

Banach, S.: On measures in independent fields. Edited by S. Hartman. Studia math. 10, 159—177 (1948).

Ein System $\mathfrak{K} = \{\mathfrak{K}_i\}_{i \in I}$ von Körpern (Booleschen Mengenverbänden) \mathfrak{K}_i von Teilmengen einer Grundmenge T heißt endlich bzw. abzählbar unabhängig, wenn bei beliebiger Wahl, sowohl der endlich bzw. abzählbar vielen Indizes i_1, i_2, \dots, i_n bzw. i_1, i_2, \dots in I als der $H_{i_\nu} \in \mathfrak{K}_{i_\nu}$, $H_{i_\nu} \neq 0$, gilt: $\bigcap_{\nu=1}^n H_{i_\nu} \neq 0$ bzw. $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} H_{i_\nu} \neq 0$. Marczewski [Colloq. math. 1, Nr. 2, 122—132 (1948)] hat

gezeigt: Wenn \mathfrak{K} endlich unabhängig ist und in jedem $\mathfrak{U}_i \in \mathfrak{K}$ ein Inhalt μ_i mit $\mu_i(T) = 1$ definierbar ist, dann läßt sich in dem kleinsten Körper $U(\mathfrak{K})$, der alle $\mathfrak{U}_i \in \mathfrak{K}$ als Unterkörper enthält, ein Maß μ definieren, so daß gilt:

- I) $\mu(H) = \mu_i(H)$ für $H \in \mathfrak{U}_i \in \mathfrak{K}$, $i \in I$.
- II) $\mu \left(\bigcap_{v=1}^n H_{i_v} \right) = \prod_{v=1}^n \mu_{i_v}(H_{i_v})$ für $H_{i_v} \in \mathfrak{U}_{i_v} \in \mathfrak{K}$, $v = 1, 2, \dots, n$, $n < +\infty$

und stellte die Frage, ob der Satz ebenfalls gilt, wenn die endliche durch abzählbare Unabhängigkeit, der Inhalt durch totaladditiven Inhalt und in II) „ $n < +\infty$ “ durch $n \leq \infty$ ersetzt wird. Die vorliegende Arbeit, die aus dem Nachlaß des verstorbenen polnischen Mathematikers S. Banach stammt, geschrieben 1940 und jetzt übersetzt und ergänzt von Hartman, beantwortet diese Frage bejahend. *Kappos.*

Ringenberg, Lawrence A.: On the extension of interval functions. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 134—146 (1947).

Bezeichnungen: Es sei R ein festes, abgeschlossenes Intervall in der kartesischen (x, y) -Ebene. Unter einem Intervall J wird jedes abgeschlossene Teilintervall von R verstanden, also $J = J \subset R$; der offene Kern von J sei J° . Unter einer Einteilung $e(J)$ von J verstehen wir ferner ein System von endlich vielen, in J enthaltenen Intervallen, etwa J_1, \dots, J_k , mit paarweise fremden offenen Kernen und mit $J = J_1 \cup \dots \cup J_k$. Der Durchmesser eines Intervalls J wird mit $|J|$ bezeichnet. Es sei $\|e(J)\| = \max(|J_1|, \dots, |J_k|)$, ferner sei $|J|$ bzw. $|e(J)|$ der elementare Inhalt von J bzw. $|J_1| + \dots + |J_k|$. Regularitätsmaß $p(J)$ von J ist der Quotient aus der kleinsten durch die größte Seitenlänge. Im Folgenden bezeichnet \mathfrak{C} das System aller Intervalle J mit $p(J) \geq \lambda$, wo λ fest mit $0 \leq \lambda < 1$. (Für $\lambda = 0$ ist \mathfrak{C} das System \mathfrak{C}_0 aller Teilintervalle von R .) Ferner wird unter \mathfrak{B} verstanden ein σ -Körper von Teilmengen von R , welcher die in R offenen und folglich das System \mathfrak{B} der Borelschen Mengen in R enthält. — Ergebnisse. (I) Eine (reelle, endliche) nicht-negative Intervallfunktion $\varphi|_{\mathfrak{C}}$ ist zu einer nicht negativen absolut additiven Funktion $\Phi|_{\mathfrak{B}}$ erweiterbar, wenn und nur wenn für je abzählbar viele Intervalle J_ϱ, J'_μ mit $J_\varrho J_\tau = \emptyset$, $\varrho \neq \tau$; $\varrho, \tau, \mu = 1, 2, \dots$, und $\bigcup_\varrho J_\varrho \subset \bigcup_\mu J'_\mu$ gilt: $\sum_\varrho \varphi(J_\varrho) \leq \sum_\mu \varphi(J'_\mu)$. — Wird $\varphi \geq 0$ nicht gefordert, so ist für die Erweiterbarkeit notwendig und hinreichend, daß φ Differenz zweier nicht-negativer Funktionen ist, deren jede der vorstehend angegebenen Bedingung genügt. — (II) Die Erweiterung $\Phi|_{\mathfrak{B}}$ ist, wenn vorhanden, eindeutig durch $\varphi|_{\mathfrak{C}}$ bestimmt; falls $\varphi \geq 0$, gilt

$$\Phi(B) = \inf \left(\sum_\varrho \varphi(J_\varrho); J_\varrho \in \mathfrak{C}; B \subset \bigcup_\varrho J_\varrho \right)$$

für jedes $B \in \mathfrak{B}$. (Bemerk. d. Ref.: Dies folgt auch aus allgemeineren Sätzen.) — Bezeichnungen: $\varphi|_{\mathfrak{C}}$ heißt stetig bzw. absolut stetig, wenn aus $J_1 \subset J_2, |J_2 - J_1| < \delta(\varepsilon)$ folgt $|\varphi(J_2) - \varphi(J_1)| < \varepsilon$ und wenn dies auch für $J_1 = \emptyset$ gilt, falls $\varphi(\emptyset) = 0$ gesetzt wird bzw. wenn aus $|q| < \delta(\varepsilon)$ folgt $|\varphi(q)| < \varepsilon$, wobei q ein System von endlich vielen Intervallen J_1, \dots, J_k mit paarweise fremden offenen Kernen bezeichnet und $|q| = |J_1| + \dots + |J_k|$ sowie $\varphi(q) = \varphi(J_1) + \dots + \varphi(J_k)$. Ferner heißt $\varphi|_{\mathfrak{C}}$ additiv, wenn $\varphi(J) = \varphi(e(J))$ für jedes $e(J)$. Schließlich heißt $\varphi|_{\mathfrak{C}}$ integrierbar, wenn $\lim \varphi(e(J))$ für $\|e(J)\| \rightarrow 0$ existiert, $J \in \mathfrak{C}_0$; dieser Grenzwert wird als (Burkill-)Integral von φ über $J \in \mathfrak{C}_0$ und mit $B(J; \varphi)$ bezeichnet. Entsprechend wird das Oberintegral $B(J; \varphi)$ erklärt. Ist $B(J; |\varphi|)$ stetig, so heiße φ schwach absolut stetig. Schließlich wird die absolut additive Funktion $\Phi|_{\mathfrak{B}}$ als \mathfrak{B} -Erweiterung von $\varphi|_{\mathfrak{C}}$ bezeichnet, wenn $\Phi(B) = \varphi(J)$ für jedes $J \in \mathfrak{C}$ und $B \in \mathfrak{B}$ mit $J \subset B \subset J$. Ergebnisse: (III) Eine nicht-negative Funktion $\varphi|_{\mathfrak{C}}$ besitzt eine nicht-negative \mathfrak{B} -Erweiterung, wenn und nur wenn φ additiv und stetig ist. — (IV) Wird in (III) die Forderung $\varphi \geq 0$ weggelassen, so ist für die Existenz der \mathfrak{B} -Erweiterung notwendig und hinreichend, daß φ additiv und schwach absolut stetig ist. — (V) Ist $\varphi|_{\mathfrak{C}}$ integrierbar, so besitzt $B(J; \varphi)|_{\mathfrak{C}_0}$ eine \mathfrak{B} -Erweiterung, wenn und nur wenn φ schwach absolut stetig ist. *Haupt* (Erlangen).

Masani, P. R.: Multiplicative Riemann integration in normed rings. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 147—192 (1947).

Das Differentialgleichungssystem $dy_i(t)/dt = \sum_k y_k(t) a_{ki}(t)$ ($i, k = 1, \dots, N$) oder $Y' = YA$ wird nach Peano (1888) gelöst durch eine Reihenentwicklung $Y(t) = I + \int_a^t A(t_1) dt_1 + \int_a^t \int_a^{t_1} A(t_1) A(t_2) dt_1 dt_2 + \dots$ ($I =$ Einheitsmatrix); nach Volterra (1887), Schlesinger (1931), Rasch (1937) durch das „Produktintegral“

$Y(t) = \int_a^b (I + A(t) dt) = \lim \prod_1^n \{I + (t_i - t_{i-1}) A(t_i^*)\}^a$, wo der Limes im Riemannschen Sinne für unbegrenzt verfeinerte Intervallteilungen zu bilden ist. Im kommutativen Falle wird einfach $\int_a^b (I + A dt) = \exp \left\{ \int_a^b A dt \right\}$. Graves (1927) und G. Birkhoff (1937) ersetzen die Matrizen A , Y durch (von t abhängige) Elemente F , Y eines normierten Ringes X , beschränkten sich aber im wesentlichen auf stetige Funktionen. — Verf. entwickelt ab ovo eine systematische Theorie der additiven und multiplikativen Riemannschen Integration von Funktionen $F(t)$ auf reellen Intervallen mit Werten aus X . Der Begriff der R - bzw. R^- -Integrabilität wird ausführlich diskutiert; ein wesentliches Ergebnis ist die Äquivalenz beider Eigenschaften. Zwischen linkem und rechtem Produktintegral, \int^- und \int^+ , besteht ein Dualismus; ein Dualitätsprinzip wird als „Metatheorem“ allgemein ausgesprochen. Zahlreiche Rechenregeln und Abschätzungen werden bewiesen. z. B. Wechselbeziehungen zwischen Integration und Differentiation, wobei neben der gewöhnlichen (additiven) Ableitung Y' eine linke und rechte multiplikative Ableitung, $Y^{-1} Y'$ und $Y' Y^{-1}$, auftreten; ferner Formeln für partielle Integration und Transformation der Variablen. Alle R -integrablen Funktionen sind beschränkt. Daß $F(t)$ in $a \leq t \leq b$ beschränkt und fast überall stetig ist, ist für R -Integrabilität stets hinreichend und bei endlichdimensionalem X auch notwendig. Bei unendlichdimensionalem X wird (nach Birkhoff) ein Beispiel angegeben, wo $T(t)$, $U(t)$ und $T(t) U(t)$ integabel sind, $U(t) T(t)$ jedoch nicht. — Die Peanosche Reihendarstellung des Produktintegrals wird allgemein bewiesen. Wecken (Haltingen).

Tolstov, G. P.: Die Unrichtigkeit des Satzes von Fubini für das mehrdimensionale reguläre Denjoy-Integral. Mat. Sbornik, n. S. **24 (66)**, 263—278 (1949) [Russisch].

Die Unrichtigkeit des Fubinschen Satzes für summierbare Funktionen, also im zweidimensionalen Fall des Satzes

$$\int_Q \int_Q f(x, y) dx dy = \int_0^x dx \int_0^y f(x, y) dy = \int_0^y dy \int_0^x f(x, y) dx,$$

im Bereich der Denjoy-Integrale [Q bedeutet ein achsenparalleles Rechteck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ und (x, y)] wird durch Konstruktion einer Funktion $f(x, y)$ bewiesen, die folgende Eigenschaften hat: $f(x, y)$ ist definiert im Quadrat K ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$), ist für jedes Wertepaar x, y über Q im Sinne von Denjoy regulär integrierbar: $F(x, y) = \int_Q \int_Q f(x, y) dx dy$, und das Integral $F(x, y)$

mit den veränderlichen Grenzen x, y besitzt keine partiellen Ableitungen überall in K mit Ausnahme der Punkte der x -Achse für $\partial F / \partial x$ und der y -Achse für $\partial F / \partial y$. Das Bestehen einer solchen Funktion ist mit der Gültigkeit des Fubinschen Satzes unvereinbar, da nach diesem $F(x, y)$ nicht nur in Ausnahmepunkten differenzierbar sein kann. — Zu dem Zweck wird, ausgehend von einer im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ überall stetigen, aber nirgends weder eine rechtsseitige noch eine linksseitige Ableitung besitzenden Funktion einer Veränderlichen, durch schrittweisen Ausbau und Angleichung an das gesteckte Ziel eine Funktion $F(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert: $F(x, y)$ ist stetig in K definiert, verschwindet auf den Koordinatenachsen, besitzt fast überall in K eine endliche reguläre Ableitung $f(x, y)$ und überall in K endliche obere und untere reguläre Ableitungen, besitzt hingegen keine partiellen Ableitungen überall in K mit denselben Ausnahmen längs den Achsen wie oben. Hierbei ist unter der (oberen bzw. unteren) regulären Ableitung der Funktion $F(x, y)$ im Punkt (x, y) folgender (oberer bzw. unterer) Grenzwert verstanden:

$$\lim_{\max(\beta - \alpha, \delta - \gamma) \rightarrow 0} \frac{F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma)}{\gamma},$$
 wo der Inhalt eines sich auf den Punkt (x, y) derart zusammenziehenden Rechteckes $\alpha \leq x \leq \beta$, $\gamma \leq y \leq \delta$ ist, daß das Ver-

hältnis der kleineren zur größeren Seite des Rechteckes oberhalb einer festen Schranke $q > 0$ bleibt. q heißt Index der Regularität. Nach einem Satz von Kempisty [Fundam. Math. 27, 10—37 (1936); dies. Zbl. 15, 105], der in Analogie zum Fundamentalsatz der Integralrechnung die Integrierbarkeit im Sinne von Denjoy der regulären Ableitung und die Aufhebung der zuerst angewendeten Operation durch die zweite betrifft, hat dann die reguläre Ableitung $f(x, y)$ von $F(x, y)$ die gewünschten Eigenschaften. — Ferner wird durch Konstruktion eines Gegenbeispiels gezeigt, daß der Fubinische Satz auch dann nicht gilt, wenn die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen des Integrales $F(x, y)$ mit veränderlichen Grenzen der Funktion $f(x, y)$ gefordert wird. Bei diesem Beispiel ist $f(x, y)$ die reguläre Ableitung von $F(x, y)$ und fällt mit $\partial^2 F / \partial y \partial x$, aber nicht überall mit $\partial^2 F / \partial x \partial y$ zusammen. Dieser Umstand zeigt, daß die Existenz der regulären und der beiden gemischten Ableitungen nicht ihre Gleichheit nach sich zieht. Svenson (Erlangen).

Dubrovskij, V. M.: Über einige Kompaktheitsbedingungen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 12, 397—410 (1948) [Russisch].

Verf. hat früher [Mat. Sbornik, n. S. 20 (62), 317—329 (1947)] Kompaktheitsätze für Systeme absolut additiver Mengenfunktionen aufgestellt. Mit deren Hilfe werden in vorliegender Arbeit Kompaktheitssätze für Systeme summierbarer Punktfunktionen im E_n aufgestellt. Im einzelnen handelt es sich um Folgendes. Bezeichnungen: Es ist \mathfrak{D} ein abgeschlossenes Intervall im kartesischen E_n und $\mathfrak{K}(X; r)$ die Kugel mit X als Zentrum und r als Radius; ferner \mathfrak{I} der σ -Körper der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von \mathfrak{D} und L das n -dimensionale Lebesguesche Maß; weiter φ ein System von unendlich vielen in \mathfrak{D} eindeutigen, reellen, L -summierbaren Funktionen und $J(f; \mathfrak{X}) = \int_{\mathfrak{X}} f dL$ das L -Integral von $f \in \varphi$

über $\mathfrak{X} \in \mathfrak{I}$; schließlich Φ das System der unbestimmten Integrale $J(f; \mathfrak{X})$ für alle $f \in \varphi$. Unter φ' bzw. φ'' werde stets ein unendliches Teilsystem von φ bzw. φ' verstanden. Die $J(f; \mathfrak{X}) \in \Phi$ sind absolut additiv über \mathfrak{I} ; sie heißen gleichmäßig additiv, wenn folgendes gilt: Zu beliebigen $\mathfrak{M}_\kappa \in \mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{M}_\kappa \mathfrak{M}_\varrho = 0$, $\kappa \neq \varrho$; $\kappa, \varrho = 1, 2, \dots$, und beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert ein von f unabhängiges $K(\varepsilon)$ mit $|J(f; \mathfrak{M}_{\kappa+1} + \mathfrak{M}_{\kappa+2} + \dots)| < \varepsilon$ falls $k > K(\varepsilon)$. Mit $U(\mathfrak{M}; f; \varepsilon)$ sei bezeichnet die Ungleichung $|f(X) - (L(\mathfrak{M}))^{-1} J(f; \mathfrak{M})| < \varepsilon$. — Sätze. (A) Die $J(f; \mathfrak{X}) \in \Phi$ seien gleichmäßig additiv. (I) Damit in jedem φ' eine Teilfolge enthalten ist, die überall in \mathfrak{D} gegen eine stetige Funktion konvergiert, ist notwendig und hinreichend: Zu beliebigem φ'' , $\varepsilon > 0$ und $X \in \mathfrak{D}$ existiert $\delta = \delta(\varphi'', \varepsilon, X) > 0$ derart, daß zu jedem $\mathfrak{M} \in \mathfrak{I}$ mit $L(\mathfrak{M}) > 0$ und $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{K}(X; \delta)$ eine unendliche Teilmenge $\tilde{\varphi} \subset \varphi''$ gehört, so daß $U(\mathfrak{M}; f; \varepsilon)$ gilt für jedes $f \in \tilde{\varphi}$. — (II) Damit in jedem φ' eine Teilfolge enthalten sei, die L -fast überall in \mathfrak{D} konvergiert, ist notwendig: Zu beliebigen φ'' , $\varepsilon > 0$ und L -fast jedem $X \in \mathfrak{D}$ existiert $\delta = \delta(\varphi'', \varepsilon, X) > 0$ derart, daß zu jedem $\mathfrak{M} \in \mathfrak{I}$ mit $L(\mathfrak{M}) > 0$ und $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{K}(X; \delta)$ eine unendliche Teilmenge $\tilde{\varphi}$ von φ'' gehört, so daß $U(\mathfrak{M}; f; \varepsilon)$ gilt für jedes $f \in \tilde{\varphi}$. Die Bedingung ist auch hinreichend, falls die Ausnahmullmenge für die $X \in \mathfrak{D}$ von φ'' unabhängig ist. — (III) Damit in φ' eine Teilfolge enthalten sei, die überall in \mathfrak{D} konvergiert, ist hinreichend: Zu beliebigen $\varepsilon > 0$ und $X \in \mathfrak{D}$ existiert $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(X, \varepsilon) \in \mathfrak{I}$ mit $L(\mathfrak{E}) > 0$ derart, daß für alle $f \in \varphi'$ bis auf endlich viele Ausnahmen $U(\mathfrak{E}; f; \varepsilon)$ gilt. [Wegen einer anderen hinreichenden wesentlich komplizierteren Bedingung sei auf Satz VIII der Arbeit verwiesen.] — (B) Ohne die a priori Forderung der gleichmäßigen Additivität [vgl. (A)] gilt: Damit in φ' eine Teilfolge enthalten sei, die in \mathfrak{D} gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert, ist notwendig und hinreichend: Die $J(f; \mathfrak{X}) \in \Phi$ sind gleichmäßig additiv: zu jedem $\varphi'' \subset \varphi'$, jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $X \in \mathfrak{D}$ existiert ein $\delta = \delta(\varphi'', \varepsilon, X) > 0$ und eine unendliche Teilmenge $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\varphi''; \varepsilon)$ von φ'' derart, daß $U(\mathfrak{M}; f; \varepsilon)$ gilt für beliebiges $\mathfrak{M} \in \mathfrak{I}$ mit $L(\mathfrak{M}) > 0$ sowie $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{K}(X, \delta)$ und für jedes $f \in \tilde{\varphi}$.

Haupt (Erlangen).

Verčenko, I. Ja.: Untersuchungen zur Theorie des Inhalts von Flächen. (Diss.) Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 2 (36), 205—207 (1950) [Russisch].

Gedrängtes Resumé von Ergebnissen, welche zum Teil in den Arbeiten des Verf. [dies. Zbl. 33, 355 und Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 417—420 (1949) — die Arbeiten werden als V 1, V 2, das Referat als R 1 zitiert] enthalten, zum Teil neu sind. [Die in R 1 gegebene beiläufige Beschreibung des Flächenmaßes gibt zu Mißverständnissen Anlaß und ist besser zu ersetzen durch: „... welches, ... über die Orthogonalprojektion von $w(x, y)$ auf die XY -Ebene den Inhalt der projizierten Fläche mißt“. Für eine präzise Fassung muß auf jeden Fall auf die dort zitierte Arbeit des Verf. verwiesen werden.] Verf. stellt fest, daß sich die bei Saks (dies. Zbl. 17, 300), V. Kapitel für stetiges $w(x, y)$ gegebene Theorie im wesentlichen auf Flächen der Form $z = w(x, y)$ mit meßbarem $w(x, y)$ übertragen läßt. Dies erlaubt auch der in R 1 an vorletzter Stelle erwähnte Satz sowie der dort nicht näher ausgeführte Satz aus V 1, welcher eine Behauptung von L. C. Young (vgl. Saks, l. c. p. 182) über die Darstellung des Flächeninhaltes einer beliebigen stetigen Fläche geeignet modifiziert. Er lautet: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\tau(x, y)$, welches nur endlich viele Werte annimmt, so daß

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{J_0} \left\{ \left[\frac{w(x + \varepsilon \cos \tau, y + \varepsilon \sin \tau) - w(x, y)}{\varepsilon} \right]^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} dx dy$$

sich höchstens um ε vom Flächeninhalt von $w(x, y)$ (stetig oder meßbar) auf dem Rechteck J_0 unterscheidet. (Die Formulierung von L. C. Young und den Saksschen Beweis erklärt Verf. hier und auch schon in V 1 für unrichtig. Wie Ref. der ihm inzwischen zugänglich gewordenen Arbeit von L. C. Young [Duke math. J. 11, 43—57 (1944)] entnommen hat, haben dies schon früher Jarník, sowie Radó und Reichelderfer bemerkt). Verf. gibt noch folgenden interessanten Satz: U sei eine konvexe Menge im (zweidimensionalen) Intervall J_0 . Die dort definierte Funktion $w(x, y)$ sei stetig. Das XY -System werde um τ ($0 \leq \tau < 2\pi$) in ein $\xi\eta$ -System gedreht. Projektion von U auf die ξ -Achse ergibt $[\alpha, \beta]$. Die Länge der gemäß $\xi = \xi_0$ (ξ_0 aus $[\alpha, \beta]$) aus der Fläche w herausgeschnittenen Kurve sei $s(\xi_0)$. Sei $s(U) = \sup_{\tau} \int_{\alpha}^{\beta} s(\xi) d\xi$. Zerlegt man J_0 in endlich viele sich nicht überdeckende Intervalle J_i , dann approximiert $\sum s(J_i)$ den (endlichen oder unendlichen) Flächeninhalt von w über J_0 beliebig genau, wenn der größte Durchmesser von J_i hinreichend klein wird. — Weitere Bemerkungen über die Flächentheorie und eine Andeutung über den Inhalt von V 2. Angesichts der Tatsache, daß die hier und in V 1 behandelten Probleme kürzlich auch anderswo eine in gewissem Sinne abschließende Behandlung erfahren haben (vgl. das folgende Referat), wäre es wünschenswert, eine ins einzelne gehende Darstellung des Verf. einsehen zu können. Schmetterer (Wien).

Mulholland, H. T.: On Geöcze's problem for non-parametric surfaces. Trans. Amer. math. Soc. 68, 330—336 (1950).

Verf. gibt hier und in der inzwischen erschienenen Arbeit (dies. Zbl. 35, 30, zitiert als M 1) eine mit ausführlichen Beweisen versehene Lösung des Problems von Geöcze für Flächen der Gestalt $z = w(x, y)$ mit stetigem w . Davon unabhängig hat Verčenko ebenfalls eine Lösung des Problems gegeben (dies. Zbl. 33, 355 und vorstehendes Ref.), dessen erstgenannte Arbeit etwa gleichzeitig mit den Arbeiten des Verf. erschienen ist. Allerdings wurde M 1 schon 1947 eingereicht. Soweit Ref. dies für die Arbeit von Verčenko beurteilen kann, dürften sich die Beweise grundsätzlich nicht allzusehr unterscheiden. Die Arbeit von Mambriani (dies. Zbl. 29, 353) gestattet nach Verf. nur ein etwas weniger scharfes Resultat. da die Möglichkeit, die eingeschriebenen polyedrischen Flächen in der Form $z = f_n(x, y)$ (s. u.) darzustellen, nicht gewährleistet erscheint. Verf. gibt genau

folgenden Satz: Sei P ein Polygon in der XY -Ebene, $S(f, P)$ der Teil der Fläche $z = f(x, y)$ mit $(x, y) \in P$, f stetig. $S(f_n, P)$ sei eine Folge in $S(f, P)$ eingeschriebener polyedrischer Flächen, welche einer Folge von Einteilungen e von P in endlich viele Dreiecke entsprechen, so daß f_n in jedem Dreieck linear ist, in den Ecken $f_n = f$ gilt und der größte Durchmesser des Dreieckes der n -ten Einteilung mit $1/n$ gegen 0 strebt. Ist $E(f_n, P)$ der elementare Flächeninhalt von $S(f_n, P)$ und $A^*(f, P) = \inf_e \lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n, P)$, dann ist $A^*(f, P) = A(f, P)$, wenn $A(f, P)$ den

Lebesgueschen Inhalt von $S(f, P)$ bezeichnet. Für diesen Satz gibt nun Verf. einen weiteren und — gegenüber dem ersten, in M I dargestellten — kürzeren Beweis unter Benützung von Ergebnissen aus Radó (Length and area, New York 1948; dies. Zbl. 33, 170). Die Arbeit enthält am Schluß ausführliche Literaturangaben über die unmittelbar zurückliegenden, diesen Problemkreis betreffenden Ergebnisse bis zur endgültigen Lösung durch den Verf., mit Ausnahme der Arbeiten Verčenkos.

Schmetterer (Wien).

Besicovitch, A. S.: Parametric surfaces. I. Compactness. Proc. Cambridge phil. Soc. 45, 5—13 (1949).

Es bezeichne $P = \Phi(M)$ ($P, M = \text{Punkte}$, $M \in H$) eine stetige Abbildung eines Quadrates H in ein Quadratbild $\Phi(H)$ des dreidimensionalen Raumes. Es läßt sich $H = \Sigma Q$ schreiben, wo Q maximale Teilkontinua (Komponenten) von H bedeuten, über welchen Φ konstant, so daß $\Phi(Q) = P$ (Punkt) ist. Die Mannigfaltigkeit Π der Elemente $X = (P, Q)$ heißt Parameterfläche. Verf. metrisiert Π durch den Distanzansatz $D_\Pi(X_1, X_2) = \inf d\{\Phi(C_{12})\}$, wobei $\Phi(C_{12})$ das Bild eines Kontinuums C_{12} in H bezeichnet, das Q_1 mit Q_2 verbindet; $d(Z)$ stellt hier den Durchmesser der räumlichen Menge Z dar, und die Bildung des Infimums erstreckt sich über alle möglichen C_{12} . — Für zwei Parameterflächen Π_1 und Π_2 wird eine Fréchet'sche Distanz durch $D_F(\Pi_1, \Pi_2) = \inf \text{Max } D_E\{\Phi(M), \Phi(\tau[M])\}$ eingeführt, wo $M' = \tau[M]$ eine topologische Abbildung von H auf sich bedeutet; das Maximum der Euklidischen Distanz D_E ist über alle $M \in H$ und das Infimum über alle τ zu bilden. Konvergenz für Π -Folgen und Kompaktheit für Π -Mengen sind nun in der üblichen Weise definiert. — Verf. versteht für ein $\sigma > 0$ unter einer $E(\sigma, \Pi)$ eine Menge von Elementen X von Π , für welche $D_\Pi(X, X') \geq \sigma$ ($X, X' \in E$, $X \neq X'$) ausfällt; die Anzahl N der Elemente von $E(\sigma, \Pi)$ kann bei festen σ, Π eine endliche Schranke nicht überschreiten. Verf. nennt nun eine Π -Menge hinsichtlich der Nachbarschaft gleichmäßig beschränkt, wenn für jedes $\sigma > 0$ eine Schranke K angegeben werden kann, so daß $N\{E(\sigma, \Pi)\} \leq K$ für alle E und alle Π ausfällt. Verf. beweist, daß diese gleichmäßige Beschränktheit mit der Kompaktheit äquivalent ist.

H. Hadwiger (Bern).

Besicovitch, A. S.: Parametric surfaces. II. Lower semi-continuity of the area. Proc. Cambridge phil. Soc. 45, 14—23 (1949).

Einleitend stellt Verf. einige kritische Betrachtungen zum Flächenmaß nach Lebesgue-Fréchet an, das die wichtige Eigenschaft der Halbstetigkeit aufweist, nach der Meinung des Verf. aber aus verschiedenen Gründen nicht befriedigt, vor allem weil es zu Ergebnissen führt, die mit der vernünftigen Idee des Flächenmaßes schlecht verträglich sind. So hat z. B. der Verf. [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 16, 86—102 (1945)] eine topologische Kugel konstruiert, deren Oberfläche einerseits ein beliebig kleines (L, F) -Flächenmaß, andererseits aber ein positives dreidimensionales L -Maß besitzt! — Verf. untersucht für Parameterflächen (vgl. vorstehendes Referat) ein zweidimensionales Flächenmaß nach Carathéodory-Hausdorff, und führt insbesondere den Nachweis, daß dieses (C, H) -Flächenmaß in sehr allgemeinen Fällen die Eigenschaft der unteren Halbstetigkeit aufweist. Genauer: Es sei Π eine Parameterfläche, E_k ($k = 1, 2, \dots$) die Punktmenge von Π der Vielfachheit k . Das (C, H) -Flächenmaß von Π ist gegeben durch $A^2 \Pi = \Sigma k A^2 E_k$.

falls $\Lambda^2 E_\infty = 0$; durch $\Lambda^2 \Pi = \infty$, falls $\Lambda^2 E_\infty > 0$. Hierbei bezeichnet $\Lambda^2 E$ das zweidimensionale (C, H) -Maß von E , also

$$\Lambda^2 E = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\pi}{4} \inf \Sigma d^2 [E \subseteq \Sigma K_d, d \leq \varrho],$$

wobei sich die Summation Σ über endlich oder abzählbar unendlichviele Kugeln K_d , die in ihrer Vereinigung E überdecken, zu erstrecken hat, wo die Durchmesser d der Bedingung $d \leq \varrho$ unterliegen. — Für eine konvergente Folge $\Pi_n \rightarrow \Pi$ gilt nun das untere Halbstetigkeitstheorem, wonach $\Lambda^2 \Pi^0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Lambda^2 \Pi_n$ ist, falls im Innern Π^0 von Π überall eine Tangentialebene existiert, oder falls Π glatt (smooth) ist. Wegen der genaueren Erklärung der beiden oben erwähnten Begriffe muß auf die Originalarbeit verwiesen werden.

H. Hadwiger (Bern).

Besicowitch, A. S.: Parametric surfaces. IV. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **20**, 1—7 (1949).

Für das (C, H) -Flächenmaß $\Lambda^2 \Pi$ einer durch die stetige Quadratabbildung $P = \Phi(M)$ gegebenen Parameterfläche Π (vgl. die beiden vorstehenden Referate) wird für den Fall eines totalstetigen und Λ^2 -fastüberall approximativ differenzierbaren Φ die übliche Integraldarstellung hergeleitet.

H. Hadwiger (Bern).

Mickle, Earl J.: Metric foundations of continuous transformations. Trans. Amer. math. Soc. **63**, 368—391 (1948).

Der Verf. entwickelt eine Theorie für stetige Transformationen in allgemeinen metrischen Räumen. Einleitend und abschließend stellt er den Zusammenhang mit den Ergebnissen von T. Radó und P. Reichelderfer (vgl. dies. Zbl. **24**, 387) über die totalstetigen Transformationen in der Ebene her, die sich als Spezialfälle aus der entwickelten Theorie neu gewinnen lassen. Es bezeichne T eine eindeutige stetige Abbildung $p^* = T(p)$ ($p \in A$, $p^* \in A^*$) einer analytischen Teilmenge $A \subset M$ eines vollständigen und separablen metrischen Raumes M (A gehört zu dem über der Klasse der abgeschlossenen Teilmengen von M konstruierten Suslinschen System) in einen metrischen Raum M^* . Verf. entwickelt zunächst die für den Aufbau der Theorie derartiger Transformationen erforderlichen Begriffe und Hilfstheoreme. So gilt z. B. (Hausdorff): A^* ist wieder analytisch. Für $p^* \in A^*$, $E \subset A$ bezeichne $N(p^*, T, E)$ die Anzahl (ev. ∞) der Punkte $p \in EA$, für die $T(p) = p^*$ ist. Ist A_k^* die Menge der p^* , für die $N(p^*, T, A) \geq k$ ausfällt, so gilt wieder (Hahn): A_k^* ist ebenfalls analytisch. Ein für den Aufbau der Theorie wichtiger Hilfssatz ist der folgende: Es existiert ein abzählbares System von Mengen

A_n ($n = 1, 2, \dots$), wobei $A = A_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0$, $A_i A_j = 0$ ($i \neq j$) gilt, so daß

T über jeder Menge A_n eineindeutig ausfällt. A_n und $T(A_n)$ sind Differenzen analytischer Mengen. — Es bezeichne $\nu(E)$ bzw. $\nu^*(E^*)$ ein beschränktes äußeres Carathéodorysches Maß in M bzw. M^* , welches bezüglich der offenen Mengen regulär ist. \mathfrak{M} bedeute die Klasse der Mengen $E \subset M$, für die $T(EA_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) ν^* -meßbar ist (\mathfrak{M} ist von T nicht aber vom Zerlegungssystem A_n abhängig). Verf. beweist, daß durch $\mu(E, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*[T(EA_n)]$ in \mathfrak{M} ein Maß definiert wird.

Für $E \in \mathfrak{M}$ ist $N(p^*, T, E - A_\infty)$ eine endlichwertige und ν^* -meßbare Funktion in M^* ; es gilt

$$\mu(E, T) = \int_{M^*} N(p^*, T, E - A_\infty) d\nu^*.$$

Es sei nun $f(p)$ eine in A definierte endlichwertige Funktion. Verf. definiert: $\sigma(p^*, T, E, f) = 0$, falls die Menge $ET^{-1}(p^*)$ entweder keinen oder unendlich viele Punkte enthält; andernfalls sei $\sigma(p^*, T, E, f) = \sum f(p)$, wobei sich die Summation über die endlich vielen p in $ET^{-1}(p^*)$ erstreckt. Nun beweist er, daß für jede in M definierte μ -meßbare Funktion $f(p)$ und für jede μ -meßbare Teilmenge $E \subset M$ die Transformationsformel

$$\int_E f(p) d\mu = \int_{M^*} \sigma(p^*, T, E, f) d\nu^*$$

gilt. Für eine endlichwertige in M^* definierte ν^* -meßbare Funktion $H(p^*)$ gilt die fundamentale Relation

$$\int_E H[T(p)] f(p) d\mu = \int_{M^*} H(p^*) \sigma(p^*, T, E, f) d\nu^*,$$

vorausgesetzt, daß das linksseitige Integral existiert. Ist $f(p) \geq 0$, so genügt auch die Existenz des rechtsseitigen Integrals. Die Transformation T heißt von beschränkter Variation, falls die ν^* -meßbare Funktion $N(p^*, T, A)$ sogar ν^* -summabel ist. Es gilt dann

$$\int_E H[T(p)] d\mu = \int_{M^*} H(p^*) N(p^*, T, E) d\nu^*,$$

vorausgesetzt, daß eines der beiden Integrale existiert. Ferner heißt T totalstetig, falls aus $\nu(E) = 0$ folgt: $\nu[T(E)] = 0$; hierfür ist notwendig und hinreichend, daß $\mu(E, T)$ ein totalstetiges und vollständig additives Mengenfunktional in \mathfrak{M} darstellt. Nach einem Theorem von Radon-Nikodym kann in diesem Fall eine Integraldarstellung $\mu(E, T) = \int D(p, T) d\nu$ beansprucht werden, wo $D(p, T)$ eine nichtnegative, ν -meßbare Funktion ist. Es gilt jetzt die Transformationsformel

$$\int_E H[T(p)] f(p) D(p, T) d\nu = \int_{M^*} H(p^*) \sigma(p^*, T, E, f) d\nu^*,$$

vorausgesetzt, daß das linksseitige Integral existiert. Ist $f(p) \geq 0$, so genügt auch die Existenz des rechtsseitigen Integrals. H. Hadwiger (Bern).

Tchakaloff, L.: Über eine allgemeine Quadraturformel. C. r. Acad. Bulgare Sci. 1, Nr. 1, 9—12 (1948).

Durch Teilbruchzerlegung rationaler Funktionen entsteht mit $k, m = 1, 2, \dots$:
 $\nu_k = -1, 0, \dots$, dem Grad $g = -1 + \sum_{k=1}^m (\nu_k + 1)$ von $f(x)$ und Beiwerten

$$b_{k,l} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_k} \frac{dz(z-a_k)^l}{l!} \int_a^b \frac{dx}{z-x} \left\{ 1 - \prod_{q=1}^m \left(\frac{x-a_k}{z-a_q} \right)^{\nu_q+1} \right\}$$

als Verallgemeinerung Kowalewskischer Ansätze

$$\int_a^b dx f(x) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{\nu_k} b_{k,l} f^{(l)}(a_k).$$

Wilh. Maier (Jena).

Ascoli, Guido: Un'osservazione sulle formule di quadratura. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 2, 212—216 (1947).

Ist $f(x)$ in $A < x < B$ erklärt und gilt die Quadraturformel

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} f(a + t_{\nu}(b-a))$$

mit festen $\lambda_{\nu} > 0$ und festen $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$ bei beliebiger Wahl von a, b mit $A < a < b < B$, so ist im Falle $\sum_{\nu} \lambda_{\nu} \neq 1$ notwendig $f \equiv 0$, im Falle $\sum_{\nu} \lambda_{\nu} = 1$ aber f ein Polynom vom Grade $\leq s$, wobei sich s als kleinste Zahl mit

$(s+2) \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} t_{\nu}^{s+1} \neq 1$ bestimmt.

Aumann (München).

Šilov, G. E.: Verallgemeinerung eines Satzes über die Differentiation einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen. Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 75—84 (1950) [Russisch].

L'A. dit qu'une fonction $\alpha(t)$, définie sur le segment $[0, 1]$, est permise si elle possède la propriété suivante: si une suite $x_n(t)$ de fonctions continument différentiables sur $[0, 1]$ converge uniformément vers 0, et si $x'_n(t) \alpha(t)$ converge uniformément vers une fonction limite $y(t)$, alors $y(t) = 0$. D'après un théorème classique, la fonction $\alpha(t) = 1$ est permise; par contre la fonction caractéristique d'un ensemble parfait partout non dense n'est pas permise. Etant donné une fonction $\alpha(t)$, on pose $\tilde{\alpha}(t) = \max \left[\alpha(t), \lim_{s \rightarrow t} \alpha(s) \right]$; cette fonction est semi-continue supérieurement,

et l'A. montre d'abord que, pour que α soit permise, il faut et il suffit que $\tilde{\alpha}$ le soit; la détermination des fonctions permises est alors effectuée par le théorème suivant. Soit α une fonction positive semicontinue supérieurement; pour tout nombre $C > 0$, soit F_C l'ensemble des t où $\alpha(t) \geq C$; désignons par Q_1 l'ensemble suivant: $t \in Q_1$ s'il existe un $C > 0$ tel que t soit un point de densité de F_C (au sens de la mesure de Lebesgue: tout voisinage de t rencontre F_C suivant un ensemble de mesure > 0) et si de plus la fonction $1/\alpha$ est sommable dans un intervalle de centre t ; soit Q_2 l'ensemble des points limites de tous les ensembles de la forme $F_C \cap Q_1$, puis Q_3

l'ensemble des points limites de tous les ensembles de la forme $F_C \cap Q_2$, et continuons ainsi transfiniment; alors une condition nécessaire et suffisante pour que α soit permise est que tout point où α n'est pas nulle appartienne à l'un au moins des Q_α .

R. Godement (Nancy).

Ramaswami, V.: On polynomials and Lagrange's form of the general mean-value theorem. Bull. Amer. math. Soc. 54, 946—949 (1948).

Verf. beweist: Ist $f(t)$ im Intervall $a < t < b$ n -mal differenzierbar und in der dann für $a < x < x + h < b$ gültigen Taylorsche Formel mit Lagrangeschem Restglied

$$f(x+h) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{h^v}{v!} f^{(v)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$$

das $\theta = \theta(x, h)$ ein Polynom in x und h , so existiert auch $f^{(n+1)}(t)$ in (a, b) , und es ist entweder $f^{(n+1)}(t) = 0$ in (a, b) oder $f^{(n+1)}(t)$ gleich einer von Null verschiedenen Konstanten und $\theta(x, h) = 1/(n+1)$. Dasselbe gilt auch, wenn allgemeiner

$$\theta(x, h) = c(x) + h^\alpha \Phi(x, h) \text{ mit } \alpha > 1 \text{ oder } \theta(x, h) = \sum_{\mu=0}^m h^\mu \theta_\mu(x)$$

bei einigen zusätzlichen Voraussetzungen über $c(x)$, $\Phi(x, h)$ bzw. die $\theta_\mu(x)$. Einige Ergebnisse von R. Rothe [Math. Z. 9, 300—325 (1921)] werden damit verallgemeinert.

M. Müller (Tübingen).

Dehn, Max: On the approximation of a function by a power series. Math. Student, Madras 15, 79—82 (1947).

G. Peano [Lezioni di Analisi Infinitesimale, Torino 1893, 79] osservò che se per una assegnata funzione $f(x)$ esistono in un punto a le derivate

$$f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a),$$

si ha

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(a) + \varepsilon(h)]$$

con $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$; e perché sia per $0 < |h| \leq \delta$

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + [a_n + \varepsilon(h)] h^n$$

è necessario e basta che si abbia

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = a_0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - a_0}{h} = a_1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - a_0 - a_1 h}{h^2} = a_2, \\ \dots, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - a_0 - a_1 h - \dots - a_{n-1} h^{n-1}}{h^n} = a_n.$$

L'A. dimostra che condizione necessaria e sufficiente perché risulti per $0 \leq |h| \leq \delta$

$$f(a+h) = f(a) + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + [a_n + \varepsilon(h)] h^n$$

è che definite le funzioni $R_1(h), R_2(h), \dots, R_n(h)$ con le relazioni

$$R_1(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad R_k(h) = \frac{R_{k-1}(2h) - R_{k-1}(h)}{h}, \quad (k = 2, \dots, n),$$

risultino finiti i limiti $\lim_{h \rightarrow 0} R_1(h) = a_1$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} R_k(h) = (2^1 - 1)(2^2 - 1)(2^3 - 1) \dots (2^{k-1} - 1) a_k, \quad (k = 2, 3, \dots, n).$$

Giovanni Sansone (Firenze).

Ridder, J.: Konvexe Funktionen. Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1949, 007, 2 p. (1949) [Holländisch].

Résumé d'une conférence exposant quelques propriétés classiques des fonctions convexes.

Horváth (Paris).

Ammann, A.: Sur les répartitions des suites de nombres réels. *Comment. math. Helvetic* **21**, 327—331 (1948).

Résumé einer Thèse der Universität Genf. Definitionen: Eine Folge konvexer, wachsender Funktionen $x_i(t)$ mit dem Definitionsbereich $J = [0, 1]$ heiße normal, wenn für jedes α mit $0 < \alpha < 1$ und jede beliebige Riemann-integrierbare, periodische Funktion $P(x)$ mit der Periode ω gilt: $[P] = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha^{-1} \int_0^\alpha P_i(t) dt$, wobei

$$[P] = \omega^{-1} \int_0^\omega P dx \text{ und } P_i(t) = P(x_i(t)). \text{ Es sei } F_n(t) = n^{-1}(P_1(t) + \cdots + P_n(t)).$$

Ist dann $[P] = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t)$ für jedes P der Periode ω , so heiße die Folge $\{x_i\}$ gleichverteilt im Punkt t für ω . Ferner heißt $\{x_i\}$ unifiant in t für ω , wenn für jedes P der Periode ω gilt:

$$\lim F_n(t) \leq [P] \leq \overline{\lim} F_n(t).$$

Schließlich heiße $\{x_i\}$ total gleichverteilt bzw. total unifiant in t , wenn $\{x_i\}$ gleichverteilt bzw. unifiant ist in t für jedes $\omega = 1, 2, \dots$, also für jedes rationale ω .

— Sätze: (I) Es ist $\{x_i\}$ normal, wenn $x_i^+(0) \rightarrow +\infty$ für $i \rightarrow \infty$. (II) Es gibt eine von $\{x_i\}$ unabhängige Folge von Funktionen $P^{(r)}$ der Periode ω derart, daß $\{x_i\}$ unifiant ist für ω , falls $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \leq [P^{(r)}] \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(t)$ für jedes r . (III) Ist $\{x_i\}$ normal, so auch unifiant für jedes ω je in fast jedem t sowie total unifiant in fast jedem t . (IV) Ist die Folge $\{a_i t\}$ fast überall gleichverteilt bzw. nicht gleichverteilt für 1, so ist sie totalgleichverteilt fast überall bzw. nicht total gleichverteilt bis auf eine Nullmenge.

Haupt (Erlangen).

Peixoto, Mauricio Matos: On the existence of derivative of generalized convex functions. *Summa Brasil. Math.* **2**, Nr. 3, 8 S. (1948).

Beckenbach has generalized the notion of convex function as follows [Bull. Amer. math. Soc. **43**, 363—371 (1937); this Zbl. **16**, 352]. Let $\{F\}$ be a family of real continuous functions $F(x)$ ($a < x < b$) such that, given the numbers $a < x_1 < x_2 < b$, y_1, y_2 , there exists exactly one function $F(x)$ passing through the points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. $f(x)$ is called a sub- $\{F\}$ -function if for all $a < x_1 < x_2 < b$ we have $f(x) \leq F_{12}(x)$ in $x_1 < x < x_2$, where $F_{12}(x)$ is that member of $\{F\}$ which passes through $(x_1, f(x_1))$ and $(x_2, f(x_2))$. The au. proves that if certain differentiability conditions are imposed upon the functions $F(x)$, then every sub- $\{F\}$ -function possesses a derivative almost everywhere, resp. excepted on an enumerable set.

Horváth (Paris).

Peixoto, Marilia Chaves: On the inequalities $y''' \geq G(x, y, y', y'')$. *An. Acad. Brasil. Ci.* **21**, 205—218 (1949).

The au. considers the case $n = 3$ of the notion of n -parameter family of functions and associated convex functions introduced by Tornheim [Bull. math. Soc. **53**, 1119 (1947)]. Let $\{F\}$ be a family of real continuous functions $F(x)$ ($a < x < b$) such that given the numbers $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, y_1, y_2, y_3 there exists exactly one element $F(x)$ passing through the points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. $f(x)$ is called a convex function associated with the family $\{F\}$, if for all $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ we have $f(x) \geq F_{123}(x)$ in $x_1 < x < x_2$ and $f(x) \leq F_{123}(x)$ in $x_2 < x < x_3$, where $F_{123}(x)$ is that element of $\{F\}$ which verifies $F_{123}(x_1) = f(x_1)$, $F_{123}(x_2) = f(x_2)$, $F_{123}(x_3) = f(x_3)$. (For $n = 2$ the corresponding notion coincides with Beckenbach's generalized convexity, cf. preceding review.) Suppose now that the family $\{F\}$ consists of the solutions of the equation $y''' = G(x, y, y', y'')$, and that for any $a < x_0 < b$, y_0, y'_0, y''_0 there exists exactly one $F(x)$ which verifies $F(x_0) = y_0$, $F'(x_0) = y'_0$, $F''(x_0) = y''_0$. A function $f(x)$ possessing a continuous third derivative will be convex in the above sense if and only if $f'''(x) \geq G(x, f(x), f'(x), f''(x))$.

(The analogous result for $n = 2$ has been established by M. M. Peixoto, this Zbl. 32, 347.) Horváth (Paris).

Hirschman jr., I. I.: On the distributions of the zeros of functions belonging to certain quasi-analytic classes. Amer. J. Math. 72, 396—406 (1950).

M_n being a sequence of positive numbers, define $C\{M_n, k\}$ as the class of infinitely differentiable functions $f(t)$ ($-\infty < t < \infty$) satisfying

$$|f^{(n)}(t)| \leq A k^n M_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Put $T(v) = \max_{n \geq 1} (v^n / M_n)$, $H(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^v \log T(t) t^{-2} dt$ and let $\mathfrak{F}(u)$ be the inverse function of $H(v)$. By the classical theorem of Denjoy-Carleman, the class $C\{M_n\}$, consisting of the union of the classes $C\{M_n, k\}$ for all $k > 0$, is quasi-analytic if and only if $H(v) \rightarrow \infty$ as $v \rightarrow \infty$. The au. calls a quasi-analytic class regular if M_n is of the form $n! [\nu(n)]^n$, where $\nu(x)$ ($0 \leq x < \infty$) is a continuously differentiable function with $\nu(0) = 0$, $\nu'(x) \geq 0$, $x \nu'(x) / \nu(x) = o(1)$ as $x \rightarrow \infty$. Following results are established. 1. Let $C\{M_n\}$ be a regular class. If $f(t) \in C\{M_n, k\}$ and if for a sequence of pairs $\{t_n, T_n\}$, $0 < t_n \uparrow \infty$, $0 \leq T_n \leq t_n$, we have in each of the intervalls $|t - T_n| \leq 1/k \nu[\mathfrak{F}(k' t_n)]$ the inequality

$$|f(t)| \leq B \exp [-\mathfrak{F}(k' t_n)]$$

for a $k' > k$, then $f(t) \equiv 0$. 2. Let $C\{M_n\}$ be a regular class and let $f(t) \in C\{M_n, k\}$. $f(t) \not\equiv 0$. If $Z(u)$ is the number of zeros of $f(t)$ in $-u \leq t \leq u$, counted according to their multiplicities, then $\limsup_{u \rightarrow \infty} u^{-1} H[Z(u)] \leq k$. 3. Conversely let $C\{M_n\}$ be

a regular class, let an arbitrary set of zeros with associated multiplicities be given and let $Z(u)$ be the number of the zeros counted according to their multiplicities in $-u \leq t \leq u$. If $k > \limsup_{u \rightarrow \infty} u^{-1} H[Z(u)]$, then there exists an $f(t) \in C\{M_n, k\}$

which has precisely these zeros. — The most interesting particular cases are the logarithmic classes, where $M_n = N_n^{(m)} = n! [\log n \cdot \log \log n \cdots \log_m n]^n$, which are of course regular. Here $H(v) \sim (2/\pi) \log_{m+1} v$, so that if for instance $f(t) \in C\{N_n^{(m)}, k\}$ and $f(t) \not\equiv 0$, then $\limsup_{u \rightarrow \infty} (2/\pi u) \log_{m+1} Z(u) \leq k$. Horváth.

Cavallaro, Vincenzo G.: Funzioni continue e proposizioni geometriche concomitanti. Estensione del teorema di Pitagora. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 174—177 (1950).

Allgemeine Reihenlehre:

Cattaneo, Paolo: Calcolo approssimato di π . Boll. Un. mat. Ital., III. S. 2, 148—149 (1947).

Die gut konvergierende Reihe für $\arcsin x$ liefert für $x = 1/2$ schon mit den ersten fünf Gliedern den Wert von $\pi/6$ auf sechs Stellen genau. W. Hahn (Berlin).

Agnew, Ralph Palmer: Subseries of series which are not absolutely convergent. Bull. Amer. math. Soc. 53, 118—120 (1947).

Beweis des ziemlich trivialen Satzes: Sind die a_ν reell oder komplex und ist $\sum a_\nu$ nicht absolut konvergent, so kann man eine Indexfolge n_k angeben, für die $n_{k+1} - n_k$ mit k über alle Grenzen wächst und außerdem $\sum a_{n_k}$ divergiert. — Der Satz 2 der Arbeit ist von diesem Satz nur formal verschieden. Krafft (Marburg).

Stalley, Robert: A generalization of the geometric series. Amer. math. Monthly 56, 325—327 (1949).

Ermittlung der Summe der Potenzreihe $K_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k$ für positives ganzes n . Krafft (Marburg).

Aljančić, S.: Sur une formule sommatoire généralisée. Publ. Inst. math., Acad. Serbe Sci. A 2, 263—269 (1948).

Es sei $a(x)$ eine für $a \leq x \leq b$ erklärte Funktion beschränkter Variation mit den Unstetigkeitsstellen x_v . Setzt man

$$a(x) = \bar{a}(x) + \sum_{x_v < x} \{a(x_v + 0) - a(x_v - 0)\},$$

so ist (bei geeigneter Erklärung an den Stellen x_v) $a(x)$ stetig. Ist weiter $f(x)$ eine für $a \leq x \leq b$ erklärte und n -mal differenzierbare Funktion und setzt man mit konstanten C_k

$$a_0(x) = a(x) + C_0, \quad a_k(x) = \int_a^x a_{k-1}(x) dx + C_k,$$

so gilt

$$\begin{aligned} & \sum \{a(x_v + 0) - a(x_v - 0)\} f(x_v) + \int_a^b f(x) d\bar{a}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \{a_k(b) f^{(k)}(b) - a_k(a) f^{(k)}(a)\} + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x) da_n(x). \end{aligned}$$

Verf. zeigt, daß dieses ihm von Karamata mitgeteilte Ergebnis als einen Spezialfall die Taylorformel enthält, wenn die C_k durch $a_k(b) = 0$ bestimmt werden und $a(x) = -1$ für $a \leq x < b$, $a(b) = 0$ ist. Wählt man die C_k so, daß $a_k(a) = a_k(b)$ ist, so erhält man mit $a = 0$, $b = N$ (ganz) und $a(x) = x - [x]$ die Euler-MacLaurinsche Summenformel. Krafft (Marburg).

Cherry, T. M.: Summation of slowly convergent series. Proc. Cambridge phil. Soc. 46, 436—449 (1950).

In dem Rest $\varrho_n = \sum_{v=n}^{\infty} C_v t^v$ einer langsam konvergenten und nicht geschlossen auswertbaren Potenzreihe wird zur genäherten Auswertung $C_v = c_v f(v)$ und $c_n + c_{n+1} t + c_{n+2} t^2 + \dots = \varphi_n(t)$ gesetzt, und es werden dann die Transformationen

$$(1) \quad \varrho_n = t^n \sum_{v=0}^{p-1} \vartheta^v \varphi_n(t) \frac{D_n^v f(n)}{v!} + R_{n,p}$$

und

$$(2) \quad \varrho_n = t^n \sum_{v=0}^{p-1} t^v D_t^v \varphi_n(t) \frac{\Delta^v f(n)}{v!} + S_{n,p}$$

— Abkürzungen: $\vartheta = t(d/dt)$, $D_t = d/dt$, $D_n = d/dn$, $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ — betrachtet, von denen die zweite für $\varphi_n = (1-t)^{-1}$ bei $t = -1$ in die Eulersche übergeht. — Zur Anwendung ist die Kenntnis eines geschlossenen Ausdrucks für φ_n oder schnelle Konvergenz der φ_n und $\vartheta^v \varphi_n$ bzw. $D_t^v \varphi_n$ definierenden Reihen erforderlich. Daraus und aus verschiedenen über die in $C_v = c_v f(v)$ verwendete Funktion $f(z)$ zur Durchführung des theoretischen Teils gemachten Voraussetzungen ergeben sich Einschränkungen des Verwendungsbereichs. Als der Behandlung mit (1) oder (2) zugänglich werden die bei der Lösung partieller Differentialgleichungen durch Trennung der Veränderlichen auftretenden Potenzreihen bezeichnet. — Für $R_{n,p}$ und $S_{n,p}$ werden mehrere Abschätzungen gegeben mit Hinweisen darüber, wo sie günstig sind. Unter den möglichen $\varphi_n(t)$ werden speziell die Funktionen aus zwei rekursiv definierten „Familien“ — besonders im Hinblick auf ihre Wirkung bei den Abschätzungen von $R_{n,p}$ und $S_{n,p}$ — betrachtet. — Zum Schluß werden numerische Beispiele gebracht. Th. Kaluza jr. (Braunschweig).

Korenbljum, B. I.: Über Sätze vom Tauberschen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 449—452 (1949) [Russisch].

Cette Note contient un certain nombre d'applications, dans le cas du groupe additif des nombres réels, des théorèmes généraux annoncés précédemment par l'A. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64 (1949); ce Zbl. 35, 69]; il n'est malheureuse-

ment pas possible de reproduire ici les énoncés de ces résultats; disons simplement que l'A. semble avoir trouvé une méthode générale pour obtenir ou généraliser des résultats dûs à Hardy et Littlewood, Bochner, Wiener, Szasz, etc., ce qui est évidemment fort satisfaisant.

R. Godement (Nancy).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Lozinskij, S. N.: Über die Divergenz von Interpolationsprozessen in einem festen Punkt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 1017—1020 (1950) [Russisch].

Soit (1) $1 \geq x_1^{(n)} > x_2^{(n)} > \dots > x_n^{(n)} \geq -1$ ($n = 1, 2, \dots$), des systèmes de nombres et pour une fonction arbitraire bornée dans $(-1, 1)$ désignons par

$U_n(M, f, x) = \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)}(x)$ les polynômes de Lagrange, M désignant le système

(1). Soit Ω l'ensemble des fonctions $\omega(u)$, qui satisfont aux conditions suivantes: 1) $\omega(u)$ est continue pour $0 \leq u < \infty$, 2) $0 < \omega(u') \leq \omega(u'')$ pour $0 < u' \leq u''$, 3) $\omega(u_1 + u_2) \leq \omega(u_1) + \omega(u_2)$, 4) $\omega(0) = 0$. Désignons par C l'ensemble des fonctions, continues dans $-1 \leq x \leq 1$. Si $\omega \in \Omega$, désignons par C_ω l'ensemble des fonctions $f \in C$, pour lesquelles $|f(x+h) - f(x)| \leq K \omega(h)$, $-1 \leq x < x+h \leq 1$, où K est une constante, dépendant de f , et par C_ω^* l'ensemble des $f \in C$, pour lesquelles $\lim_{h \rightarrow 0+} |f(x+h) - f(x)|/\omega(h) = 0$ uniformément relativement x ,

$$-1 \leq x < x+h \leq 1.$$

L'A. énonce les théorèmes suivants: I. Soit M un système de points donnés. Alors

1) Pour chaque fonction arbitraire $\omega \in \Omega$, qui satisfait à la condition

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega(1/n) \log \log n > 0,$$

on peut trouver un point x_0 ($-1 \leq x_0 \leq 1$) et une fonction $f \in C_\omega$, tels que

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(M, t, x_0)$ n'existe pas. 2) Pour chaque fonction $\omega \in \Omega$, satisfaisant

à la condition $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega(1/n) \log \log n = +\infty$ on peut trouver un point $x_0 \in [-1, 1]$

et une fonction $f \in C_\omega^*$, tels que l'on a (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(M, t, x_0) = +\infty$. II. Pour les

nombres (1) désignons par $A_n(M) = \min_{1 \leq k \leq n-1} (x_k^{(n)} - x_{k+1}^{(n)})$ ($n = 2, 3, \dots$). Suppo-

sons que pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $p > 0$ assez grand on ait $A_n(M) \geq \varepsilon/n^p$ ($n = 2, 3, \dots$)

Alors on a: 1) Pour chaque fonction $\omega \in \Omega$, satisfaisant à la condition

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega(1/n) \log n > 0$ on peut trouver un point $x_0 \in [-1, 1]$ et une fonction $f \in C_\omega$,

tels que la limite (2) n'existe pas. 2) Pour chaque fonction $\omega \in \Omega$, satisfaisant

à la condition $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega(1/n) \log n = +\infty$, on peut trouver un point $x_0 \in [-1, 1]$ et

une fonction $f \in C_\omega^*$, tels que (3) a lieu. N. Obrechhoff (Sofia).

Kakehashi, T.: Interpolating orthogonal polynomials and the convergence of interpolation. J. Osaka Inst. Sci. Technology 1, 5—11 (1949).

Se $\mu_n(x)$ è una funzione non decrescente a scala, definita in (a, b) , avente $n+1$ punti di discontinuità in x_0, x_1, \dots, x_n con il salto costante $1/(n+1)$, se $\Phi_m^{(n)}(x)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) sono i corrispondenti polinomi interpolanti:

$$\Phi_m^{(n)}(x) = (D_{m-1} D_m)^{-\frac{1}{2}} D_m(x), \quad c_\nu = \int_a^b x^\nu d\mu_n(x) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$D_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \\ c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{2m} \end{vmatrix}, \quad D_m(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^m \end{vmatrix},$$

se $f(x)$ è continua in (a, b) , posto $a_m = \int_a^b f(x) \Phi_m^{(n)}(x) dx$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$), per

la differenza $R_n(x; f) = f(x) - \sum_{m=0}^n a_m \Phi_m^{(n)}(x)$ vale la formula

$$R_n(x; f) = O[n^{\frac{1}{2}} E_n(f) \Phi_n^{(n)}(x)]$$

dove $E_n(f)$ rappresenta la migliore approssimazione di $f(x)$ in (a, b) con polinomi di grado n . Segue uno studio dell'ordine di grandezza di $\Phi_n^{(n)}(x)$. *Sansone.*

Georgiev, G.: Sur les suites de polynomes de Sturm. C. r. Acad. Bulgare Sci. **1**, Nr. 1, 21—24 (1948).

Soit donnée une suite de polynomes $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $P_n(x)$ étant de degré n et le coefficient de x^n dans $P_n(x)$ étant positif. Supposons que les polynomes de cette suite soient liés par les relations de recurrence

$$P_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) P_n(x) + \delta_n P_{n-1}(x),$$

où $\delta_n < 0$. Il existe alors une fonction $\psi(x)$, définie et croissante dans $-\infty < x < \infty$

possédant une infinité de points de croissance, telle qu'on ait $\int_{-\infty}^{\infty} x^\mu \psi(x) d\psi(x) = 0$ pour $\mu = 0, 1, \dots, \nu - 1$. *Horváth (Paris).*

Horváth, Jean: Sur un théorème de M. Mandelbrojt concernant l'approximation polynomiale des fonctions sur tout l'axe réel. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 889—891 (1948).

L'A. donne une démonstration simple d'un résultat de S. Mandelbrojt (ce Zbl. **31**, 120) en le généralisant quelque peu. Soit $\{\nu_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) une suite croissante d'entiers positifs, $N(\nu) = \sum_{\nu_n < \nu} 1$, $D(\nu) = N(\nu)/\nu$, $D^* = \lim_{\nu \rightarrow \infty} D(\nu)$,

$D^*(\nu) = \overline{\text{borne}} D(x)$. Soi $F(x)$ ($-\infty < x < \infty$) une fonction positive et paire

$\log F(x)$ étant une fonction convexe de $\log x$. Soit $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_0 = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$) une suite croissante d'entiers non négatifs et $\{\nu_n\}$, la suite complémentaire par rapport à la suite de tous les entiers positifs. Soit $D^* < \frac{1}{2}$ et supposons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log F(e^\sigma) \exp\left(-\int_{-\infty}^{\sigma} \frac{du}{1 - 2 D^*(\beta \log F(e^u))}\right) d\sigma = \infty,$$

où β est une constante positive. Sous ces conditions l'A. démontre le théorème: Soit $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) une fonction continue et telle que $f(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \pm \infty$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynome

$P_n(x) = a_0 + a_1 x^{\lambda_1} + \dots + a_n x^{\lambda_n}$ tel que $|f(x) - P_n(x)/F(x)| < \varepsilon$, $-\infty < x < \infty$.

N. Obrechhoff (Sofia).

Horváth, Jean: Sur l'approximation polynomiale des fonctions sur une demi-droite. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1074—1076 (1948).

En utilisant une inégalité fondamentale de Mandelbrojt [Ann. sci. École norm. sup., III. S. **63**, 351 (1946)] l'A. démontre le théorème suivant: Soit $\{\lambda_n\}$ une suite croissante d'entiers positifs ($\lambda_0 = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$) et $\{\nu_n\}$ la suite complémentaire par rapport à la suite de tous les entiers positifs. Soit $N(\nu)$ la fonction de distribution de la suite $\{\nu_n\}$. Posons $D(\nu) = N(\nu)/\nu$, $D^* = \lim_{\nu \rightarrow \infty} D(\nu)$,

$D^*(\nu) = \overline{\text{borne}} D(\mu)$. Soit $D^* < 1$. Supposons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log F(e^\sigma) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{du}{1 - D^*(\log F(e^u))}\right) d\sigma = \infty,$$

où $F(x)$ ($0 \leq x < \infty$) est une fonction positive, $\log F(x)$ étant une fonction convexe de $\log x$. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans $(0, \infty)$ et telle que $f(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \infty$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynome de la forme $P_n(x) = a_0 + a_1 x^{\lambda_1} + \dots + a_n x^{\lambda_n}$ tel que $|(f(x) - P_n(x))/F(x)| < \varepsilon$ ($0 \leq x < \infty$).

N. Obrechhoff (Sofia).

Misra, M. L.: On the non-summability (C, 1) of Fourier series. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 510—514 (1947).

Soit (1) $\varphi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$, $\varphi(0) = 0$, la série de Fourier de la fonction $\varphi(t)$, intégrable (L) dans $(0, \pi)$ paire et de période π . L'A. démontre par un exemple que la série (1) n'est pas nécessairement sommable (C, 1) si la condition

$$\int_t^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t} dt - s = o\left(1/\log \log \frac{1}{t}\right)$$

pour $t \rightarrow 0$ est satisfaite.

N. Obrechhoff (Sofia).

Boas, Ralph P.: Quelques généralisations d'un théorème de S. Bernstein sur la dérivée d'un polynôme trigonométrique. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 618—619 (1948).

S. B. Stečkin (ce Zbl. **34**, 38) a donné la généralisation suivante d'une inégalité classique de S. Bernstein. I. Soit $T_n(x)$ un polynôme trigonométrique de degré n ; si $0 < \delta < \pi/n$, on a $|T'_n(x)| \leq (1/2) n \operatorname{cosec} n\delta \cdot \sup |T_n(x + \delta) - T_n(x - \delta)|$. Une inégalité analogue a lieu pour les dérivées d'ordre supérieure. Les résultats de Stečkin ont été étendus par S. Nikolsky et S. Bernstein aux fonctions entières de type exponentiel fini. Dans cette Note l'A. montre que le théorème I. est une conséquence d'un théorème de P. Civin [Duke Math. J. **8**, 656 (1941)] et que l'extension aux fonctions entières se fait par un simple raisonnement supplémentaire.

N. Obrechhoff (Sofia).

● Hardy, G. H. and W. W. Rogosinski: Fourier Series. — 2nd ed. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 38.) Cambridge: At the University Press 1950. X, 100 p.; 10 s. 6 d. net.

Spezielle Orthogonalfunktionen :

Sansone, Giovanni: La formula di approssimazione asintotica dei polinomi di Tehebychef-Laguerre col procedimento di J. V. Uspensky. Math. Z., Berlin **53**, 97—105 (1950).

Verf. verfeinert eine von Uspensky [Ann. Math., Princeton, II. S. **28**, 593—619 (1927)] entwickelte Methode, mit der man eine asymptotische Entwicklung für die Laguerreschen Polynome gewinnen kann. Der Fortschritt besteht erstens in einer genaueren Abschätzung des Restgliedes und einer Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches, der bei Uspensky fest ist, während die vom Verf. angegebene Entwicklung für $L_n^{(\alpha)}(x)$ für $1/(4n+1) \leq x \leq (4n+1)^{2/3-\epsilon}$, $0 < \epsilon < 1/3$, gültig bleibt. Zum Beweis gibt Verf., ähnlich wie Uspensky, eine asymptotische Entwicklung für ein Integral der Gestalt

$$\int_{-1}^{+1} e^{m^2 x^2/2} f(mx) (1-x^2)^{\alpha-1/2} e^{i\lambda mx} dx, \quad \alpha > -\frac{1}{2}, \quad \lambda \geq 1, \quad m > 0, \quad m\lambda \geq 1,$$

worin $f(x)$ ein Polynom in x bedeutet. Er untersucht weiter die Größenordnung des Integrals unter der Annahme, daß $f(x)$ eine ganze Funktion ist, die gewissen Wachstumsbedingungen unterliegt. Er benutzt sodann die bekannte Beziehung zwischen den Laguerreschen und den Hermiteschen Polynomen

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{\pi} (2n)! \Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} H_{2n}(\sqrt{x} \cos \varphi) \sin^{2\alpha} \varphi d\varphi$$

und eine von ihm kürzlich [Math. Z., Berlin **52**, 593—598 (1950)] mitgeteilte asymptotische Entwicklung für die $H_n(x)$; auf das Integral rechts läßt sich dann die oben angedeutete Betrachtung anwenden.

W. Hahn (Berlin).

Lebedev, N. N.: Einige Integraldarstellungen für die Produkte von Kugelfunktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **73**, 449—451 (1950) [Russisch].

Verf. leitet drei Formeln mit Kugelfunktionen erster und zweiter Art ab, deren einfachste

$$(-1)^m \pi P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch} \alpha') \sqrt{\operatorname{sh} \alpha} \sqrt{\operatorname{sh} \alpha'} \\ = \frac{2}{\pi} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \int_0^\infty Q_{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{\operatorname{ch} \psi + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha'}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha'}\right) \operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi d\psi \quad \left(\alpha > 0, \alpha' > 0, -1 < \Re n < 0\right)$$

lautet; in den beiden anderen treten rechts zwei Integrale auf. Wie man dem nur skizzierten Beweis entnimmt, sind diese Formeln bekannten Reihenentwicklungen vom Typ

$$P_n(\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha' - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \alpha' \cos \varphi) \\ = P_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\operatorname{ch} \alpha') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch} \alpha') \cos m \varphi$$

äquivalent. Man erhält sie aus diesen, wenn man mit $\cos m \varphi$ multipliziert, zwischen 0 und π integriert und für die auftretenden Kugelfunktionen passende Integrale substituiert. W. Hahn (Berlin).

Levitán, B. M.: Entwicklung nach Besselschen Funktionen in einem Fourier-Stieltjesschen Integral. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **73**, 453—456 (1950) [Russisch].

Im engen Anschluß an eine frühere Veröffentlichung (dies. Zbl. **33**, 123) skizziert Verf. einen Beweis für folgenden Satz: Es sei $f(x)$ stetig und gerade, $\sigma(\lambda)$ monoton und beschränkt, $p \geq -\frac{1}{2}$, ferner

$$T_x^p f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) \sin^{2p} \varphi d\varphi.$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß sich $f(x)$ als Hankel-Transformierte in der Gestalt

$$f(x) = 2^p \Gamma(p+1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_p(\sqrt{\lambda} x)}{(\sqrt{\lambda} x)^p} d\sigma(\lambda)$$

darstellen läßt, ist das Bestehen der Ungleichung

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n T_{x_\mu}^{x_\nu} f(x) \xi_\mu \xi_\nu \geq 0$$

für beliebige Punkte x_μ, x_ν und beliebige Zahlenwerte ξ_μ, ξ_ν . W. Hahn (Berlin).

Nordon, Jean: Sur divers équations différentielles liées aux fonctions de Lord Kelvin. Bull. Sci. math., II. S. **73**_I, 37—47 (1949).

Sia $I_\nu(x)$ la funzione di Bessel di argomento immaginario e $K_\nu(x)$ la funzione associata; siano $\operatorname{ber}_\lambda x$, $\operatorname{bei}_\lambda x$, $\operatorname{ker}_\lambda x$, $\operatorname{kei}_\lambda x$ le funzioni di Kelvin definite dalle relazioni

$$\operatorname{ber}_\lambda x + i \operatorname{bei}_\lambda x = e^{i\lambda\pi/2} I_\lambda(x e^{i\pi/4}), \quad \operatorname{ker}_\lambda x + i \operatorname{kei}_\lambda x = e^{i\lambda\pi/2} K_\lambda(x e^{i\pi/4})$$

e si considerino le quattro funzioni (1) $B_\lambda(x)$, $K_\lambda(x)$, $M_\lambda(x)$, $N_\lambda(x)$ definite dalle relazioni

$$B_\lambda(x) = \operatorname{ber}_\lambda^2 2\sqrt{x} + \operatorname{bei}_\lambda^2 2\sqrt{x}, \quad K_\lambda(x) = \operatorname{ker}_\lambda^2 2\sqrt{x} + \operatorname{kei}_\lambda^2 2\sqrt{x}, \\ M_\lambda(x) = \operatorname{ber}_\lambda 2\sqrt{x} \operatorname{ker}_\lambda 2\sqrt{x} + \operatorname{bei}_\lambda 2\sqrt{x} \operatorname{kei}_\lambda 2\sqrt{x}, \\ N_\lambda(x) = \operatorname{bei}_\lambda 2\sqrt{x} \operatorname{ker}_\lambda 2\sqrt{x} - \operatorname{ber}_\lambda 2\sqrt{x} \operatorname{kei}_\lambda 2\sqrt{x},$$

già studiate da J. C. Costello (questo Zbl. **19**, 206) e P. Humbert (questo Zbl. **17**, 304). — Di tali funzioni l'A. indica i corrispondenti sviluppi in serie; si ha così in particolare

$$B_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\lambda+2m}}{m! \Gamma(\lambda+m+1) \Gamma(\lambda+2m+1)} = \frac{x^\lambda}{[\Gamma(1+\lambda)]^2} {}_0F_3\left(1+\lambda, \frac{1+\lambda}{2}, \frac{2+\lambda}{2}; \frac{x^2}{4}\right).$$

Le funzioni (1) formano un sistema fondamentale di integrali dell'equazione

$$x^2 \omega^{(4)} + 5x \omega^{(3)} + (4 - \lambda^2) \omega^{(2)} - 4\omega = 0,$$

e le funzioni $\varrho_1(x)$, $\varrho_2(x)$, $\varrho_3(x)$, $\varrho_4(x)$ definite dalle relazioni

$$\varrho_1(x) = \int_0^x B_\lambda(x) dx, \quad \varrho_2(x) = - \int_0^x K_\lambda(x) dx, \quad \varrho_3(x) = \frac{1}{4} \sin \frac{\lambda \pi}{2} + \int_0^x M_\lambda(x) dx,$$

$$\varrho_4(x) = - \frac{1}{4} \cos \frac{\lambda \pi}{2} + \int_0^x N_\lambda(x) dx$$

formano un sistema fondamentale di integrali dell'equazione

$$x^2 \varrho^{(4)} + 3x \varrho^{(3)} + (1 - \lambda^2) \varrho^{(2)} - 4\varrho = 0.$$

Passando poi all'equazione del quarto ordine

$$x^2 y^{(4)} + \alpha x y^{(3)} + \beta y^{(2)} + \gamma y = 0$$

l'A. osserva che ad essa può darsi la forma

$$x^2 y^{(4)} + (5 - 2\sigma) x y^{(3)} + (\sigma + \lambda - 2)(\sigma - \lambda - 2) y^{(2)} - 4y = 0,$$

e di questa costruisce un sistema fondamentale di integrali di cui due hanno l'espressione

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} B_\lambda(t) dt, \quad \int_x^\infty \frac{(x-t)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} K_\lambda(t) dt$$

e due altri sono determinati mediante i loro sviluppi in serie. *Giovanni Sansone.*

Funktionentheorie:

Cooper, R.: A class of recurrence formulae. J. London math. Soc. **22**, 31—40 (1947).

Verf. untersucht, ob der Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$,

wo die Koeffizienten einer Relation von der Gestalt $\varphi(n) c_n = \sum_{m=1}^{n-1} c_m c_{n-m} \psi(m)$ ($n \geq 2$) genügen, endlich oder unendlich ist. Hier ist $\varphi(n)$ ein Polynom oder eine Summe von positiven Potenzen von n , und $\psi(m)$ ist entweder konstant oder für $m \rightarrow \infty$ monoton nach 0 abnehmend. Der Fall $\varphi(n) = n-1$, $\psi(m) = \exp\{-(m-1)\alpha\}$, $\alpha > 0$, ist früher von E. M. Wright behandelt worden [J. London math. Soc. **20**, 68—73 (1945)]. Verf. beweist, daß R im Falle $\varphi(n) = n^r$, $r > 0$, $\psi(m) = m^{-\alpha}$, $\alpha \geq 0$, $c_1 > 0$ endlich ist. Er konstruiert weiter eine gewisse monoton wachsende Funktion $\theta(t)$, welche für $t \rightarrow \infty$ unendlich wird, aber langsamer wächst als irgendein iterierter Logarithmus. Falls nun $\varphi(n) = n^r$, $r > 0$,

$$\psi(m) = \exp\{-\alpha m \theta^{-\mu}(m)\}, \quad \alpha > 0,$$

beweist er, daß R endlich oder unendlich ist, je nachdem $\mu > 1$ oder ≤ 1 ist.

H. D. Kloosterman (Leiden).

Tchakaloff, L.: Sur une représentation des fonctions entières d'ordre un et du type zéro. C. r. Acad. Bulgare Sci. **1**, Nr. 1, 13—16 (1948).

Désignons par (C) la classe des fonctions entières d'ordre inférieur à 1 ou bien d'ordre 1 mais du type 0. L'A. démontre le théorème suivant: Pour que la fonction entière $g(z)$ appartienne à la classe (C) il faut et il suffit qu'elle soit représentable par la série de Newton $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n/n!) z(z-1) \cdots (z-n+1)$ où

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} = 0$. Comme application il donne une nouvelle démonstration du théorème classique de Wigert.

N. Obrechhoff (Sofia).

Leja, F.: Sur les polynomes d'interpolation de Lagrange. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 80—89 (1948).

Soit F la frontière d'un domaine plan contenant le point à l'infini dans son intérieur. Faisons correspondre à chaque nombre $n = 1, 2, \dots$, un système de $n + 1$ points différents quelconques $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ situés sur F . Désignons par

$L_m^{(i)}(z; \xi)$ les polynomes $L_n^{(i)}(z, \xi) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq i)}}^n \frac{z - \xi_k^{(n)}}{\xi_i^{(n)} - \xi_k^{(n)}}, i = 0, 1, \dots, n$. Partageons la fron-

tière F en deux ensembles disjoints non vides F_1 et F_2 , $F = F_1 + F_2$, $F_1 \cdot F_2 = 0$, et supposons que parmi les points $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ les $\mu = \mu(n)$ initiaux appartiennent à F_1 et les $\nu = \nu(n)$ restant à F_2 . Supposons encore que l'ensemble F_1 soit fermé et que l'on ait $\mu > 1$, $\nu > 0$. Soit z un point quelconque mais fixe du plan. Désignons par $M_n^{(1)}(z) = \max_{0 \leq i \leq \mu-1} |L_n^{(i)}(z; \xi)|$, $M_n^{(2)}(z) = \max_{\mu \leq i \leq n} |L_n^{(i)}(z; \xi)|$. L'A.

démontre le théorème suivant: si z_0 est un point de l'ensemble F_2 et $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n^{(2)}(z_0)} < 1$ on a $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n^{(1)}(z_0)} > 1$.

N. Obrechhoff (Sofia).

Walsh, J. L. and H. Margaret Elliott: Polynomial approximation to harmonic and analytic functions: generalized continuity conditions. Trans. Amer. math. Soc. 68, 183—203 (1950).

It is well known that a periodic function $F(t)$ can be approximated by trigonometrical polynomials $T_n(t)$ with an order $|F(t) - T_n(t)| \leq M/n^{k+\alpha}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$; $0 < \alpha < 1$) if and only if $F^{(k)}(t)$ exists and satisfies a Lipschitz condition of order α . For $\alpha = 1$ this proposition fails and the following result of Zygmund [Duke math. J. 12, 47—76 (1945)] holds instead: The approximation $|F(t) - T_n(t)| \leq M/n$ can be realized if and only if $|F(t+h) + F(t-h) - 2F(t)| \leq A|h|$, where A is independent of t and h . In a previous paper (this Zbl. 35, 171), written in collaboration with W. E. Sewell, the authors established results analogous to the first of the above theorems, concerning approximation to harmonic and analytic functions. In the present paper they prove theorems corresponding to that of Zygmund. — C being a rectifiable Jordan curve in the plane $z = x + iy$, denote by C the closure of its interior. For an integer $k \geq 0$ the complex function $f(z)$ is said to belong to the class Z_A^k on C , if it is analytic interior to C , continuous in C and if the one-dimensional derivative $f^{(k)}(z) = F(s)$ exists, is continuous on C (s being the arc-length along C) and satisfies the condition

$$|F(s+h) + F(s-h) - 2F(s)| \leq A|h|.$$

Similarly a real function $u(z) \in Z^k$ on C if $u(z)$ is harmonic interior to C , continuous in C , $\partial^k u / \partial s^k = U(s)$ exists, is continuous on C and satisfies on C the condition $|U(s+h) + U(s-h) - 2U(s)| \leq B|h|$. Let C_R denote the image of the circle $|w| = R$ ($R > 1$) under the conformal map of $|w| > 1$ onto the exterior of C which makes the two points at infinity correspond to each other. Under some further hypotheses on C the main results are as follows. 1. Let $u(z) \in Z^k$ on C . Set $f(z) = u(z) + i v(z)$ where $v(z)$ is conjugate to $u(z)$. Then for every n there exists a polynomial $\pi_n(z)$ of order n such that $|f(z) - \pi_n(z)| \leq L/n^{k+1}$ for $z \in C$. 2. If for every n there exists a harmonic polynomial $p_n(z)$ such that $|u(z) - p_n(z)| \leq L/n^{k+1}$ for $z \in C$, then $f(z) = u(z) + i v(z) \in Z_A^k$ on C . 3. Let $u(z) \in Z^k$ on C_R . Then there exists polynomials π_n so that $|f(z) - \pi_n(z)| \leq L/n^{k+1} R^n$ for $z \in C$. 4. If harmonic polynomials $p_n(z)$ exist such that $|u(z) - p_n(z)| \leq M/n^{k+2} R^n$ for $z \in C$, $R > 1$, then $f(z) = u(z) + i v(z) \in Z_A^k$ on C_R . Horváth (Paris).

Walsh, J. L.: On distortion at the boundary of a conformal map. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 152—156 (1950).

Zum Teil bekannte Resultate über Randverzerrung bei konformer Abbildung werden auf einem interessanten Wege neu hergeleitet. Verf. konstruiert eine passende

Gebietsfolge mit Kern und wendet darauf Carathéodorys Ergebnisse über die konforme Abbildung von veränderlichen Gebieten an. Mit dieser Methode wird bewiesen: $w = f(z)$, $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, bilde $\Re z < 1$ schlicht und konform in ein Gebiet G ab, das die Strecke $0 \leq w \leq 1$ enthält, nicht aber $w = \infty$. In $w = 1$ besitze die Randkurve rechts- und linksseitige Tangenten, die mit der negativen Richtung der reellen Achse den gleichen Winkel $\alpha/2 > 0$ bilden. Weiter sei $0 < x_n = \Re z_n < 1$ und $x_n \rightarrow 1$ bei $n \rightarrow \infty$. Dann gilt auf jedem Teilbereich von $\Re z < 1$ gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f[(1-x_n)z + x_n] - f(x_n)}{1-x_n} = 1 - (1-z)^{\alpha/\pi}.$$

Wittich (Karlsruhe).

Wittich, Hans: Konvergenzbetrachtungen zum Abbildungsverfahren von Theodorsen-Garrick. Math. Ann., Berlin 122, 6—13 (1950).

If $w(z)$ maps $|z| < R$ conformally onto a stardomain G , then the argument of $w(z)$ on $|z| = R$ formally satisfies a non-linear, singular integral equation. The author shows under certain conditions on G how $w(z)$ can be determined from this equation by successive approximations. There are some misprints and minor mistakes.

Carleson (Uppsala).

Goodman, A. W.: On the Schwarz-Christoffel transformation and p -valent functions. Trans. Amer. math. Soc. 68, 204—223 (1950).

Die verallgemeinerte Schwarz-Christoffelsche Formel

$$w = f(z) = c \int_0^z \prod_{j=1}^m (1-z_j t)^{-\gamma_j} \prod_{j=1}^{p-1} (t-\beta_j) (1-\bar{\beta}_j t) dt + c'$$

bildet den Einheitskreis E ($|z| < 1$) auf ein vielblättriges Polygon ab, dessen Windungspunkte in den Punkten $f(\beta_j)$ liegen. Verf. gibt einige Beispiele, mit deren Hilfe er gewisse arithmetische Identitäten beweist, z. B. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{v=1}^{m-1} \frac{1}{v}$.

Er verallgemeinert die Begriffe des konvexen und Sterngebietes auf mehrblättrige Gebiete, indem er lokal konvexe bzw. in Hinsicht auf einen gegebenen Punkt sternige Gebiete definiert. Sei $f(z)$ regulär in E , $f(0) = 0$, $G(r, \theta) = 1 + R(zf''(z)/f'(z)) > 0$ ($z = r e^{i\theta}$) für $0 < r < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ und sei $\int_0^{2\pi} G(r, \theta) d\theta = 2\pi p$. Dann wird gesagt, daß $f(z)$ zur Klasse $C(p)$ gehört. Die Funktion $f(z)$ bildet E auf ein lokal konvexes, höchstens p -blättriges Gebiet ab. Wenn nun

$$f(z) = z^q + a_{q+1} z^{q+1} + \dots \quad (1 \leq q \leq p)$$

$p-q$ kritische Punkte $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-q} \neq 0$ in E hat, so ist $|f(z)| \leq f_M(r)$ und $|a_n| \leq A_n$, wo $f_M(z) = z^q + A_{q+1} z^{q+1} + \dots$ E auf ein Gebiet R_M abbildet, das von $p-1$ Vollebenen und einer Halbebene gebildet ist. Gehört $f(z) = z^q + \dots$ zur Klasse $C(p)$, so gehört $f(rz)/r^q$ zu $C(q)$, wenn r unterhalb einer bestimmten, genau angegebenen Schranke liegt. Analoge Sätze gelten für p -wertige sternige Funktionen; deren Klasse sei $S(p)$. Verf. gibt weiter Abschätzungen für die Koeffizienten der Entwicklungen von Funktionen, welche zu $C(p)$ bzw. $S(p)$ gehören. Alle Abschätzungen sind genau.

V. Paatero (Helsinki).

Heins, Maurice: The conformal mapping of simply-connected Riemann surfaces. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 686—690 (1949).

Verf. gibt einen neuen Beweis des Hauptsatzes der konformen Abbildung für einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen. Die Fläche wird im Anschluß an Weyl-Radó definiert und der einfache Zusammenhang durch das Verschwinden der Fundamentalgruppe auf der Fläche charakterisiert. Resultate aus der Flächen-topologie, die sich auf Triangulation gründen, sind entbehrlich. Zur Konstruktion

der Abbildungsfunktion werden das Dirichletsche Prinzip (Perron, Carathéodory) und die Gruppe der Transformationen des Einheitskreises bzw. der punktierten Ebene in sich herangezogen. Wittich (Karlsruhe).

Sario, Leo: Existence des fonctions d'allure donnée sur une surface de Riemann arbitraire. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1293—1295 (1949).

Für beliebige Riemannsche Flächen wird der Existenznachweis harmonischer Funktionen mit vorgeschriebenen Singularitäten angedeutet. Die vom Verf. vorgeschlagene Methode (passende Anwendung des alternierenden Verfahrens) vermeidet Schwierigkeiten, die in einer Konstruktion von R. Nevanlinna auftreten.

Wittich (Karlsruhe).

Sario, Leo: Quelques propriétés à la frontière se rattachant à la classification des surfaces de Riemann. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 42—44 (1950).

Verf. gibt eine Reihe von Resultaten an, die sich auf die Existenz von eindeutigen nichtkonstanten harmonischen bzw. analytischen Funktionen (beschränkt oder beschränktes Dirichletintegral) auf offenen Riemannschen Flächen beziehen.

Wittich (Karlsruhe).

Sario, Leo: Existence des intégrales abéliennes sur les surfaces de Riemann arbitraires. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 168—170 (1950).

Es wird gezeigt, wie die in den vorstehenden Referaten angedeuteten Ergebnisse zur Konstruktion Abelscher Integrale auf beliebigen Riemannschen Flächen ausgenützt werden können.

Wittich (Karlsruhe).

Florack, Herta: Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen. Schriftenreihe math. Inst. Univ. Münster, Heft 1, 35 S. (1948).

Let R be any open Riemann surface. By use of the results on analytic functions on Riemann surfaces obtained by Behnke-Stein [Math. Ann. **120**, 430—461 (1949)], the following extensions of the classical theorems of Mittag-Leffler and Weierstrass are proved: to a given sequence M of points on R without limitpoint on R , there exist functions meromorphic on R , regular outside M and with given principal parts on M , and functions regular on R and vanishing on M and only there. By constructing a function vanishing in an appropriate set M , the author shows that there is a regular function with R as domain of existence. Carleson.

Nevanlinna, Rolf: Über die Randelemente einer Riemannschen Fläche. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. **29**, 71—73 (1949).

Die Struktur des idealen Randes Γ einer offenen Riemannschen Fläche F ist bislang meistens in dem Fall untersucht worden, wo F durch Einbettungseigenschaften definiert war. Verf. weist auf die allgemeinere Aufgabe hin, die Randeigenschaften einer abstrakt gegebenen Fläche zu untersuchen, und gibt die Grundlagen für ein solches Studium an. Auf F sei l ein von einem flächeninneren Punkte P_0 ausgehender, stetiger, doppelpunktfreier Kurvenzug, der sich aus abzählbar unendlich vielen kompakten Jordanbögen l_μ zusammensetzt. $l = \sum l_\mu$ heißt Randweg, wenn $l_n + l_{n+1} + \dots$ außerhalb jeder vorgegebenen kompakten Teilfläche F_0 von F liegt, falls nur n hinreichend groß ist. Der Sektor D mit dem Rand γ sei eine nichtkompakte, einfach zusammenhängende Teilfläche von F , die von zwei von P_0 ausgehenden, sonst punktfremden Randwegen l^1 und l^2 berandet wird. D ist in $|z| < 1$ eineindeutig und konform abbildbar, wobei zwei Fälle möglich sind: 1) Das Bild von γ umfaßt $|z| = 1$ bis auf einen Punkt. 2) Das Bild von γ läßt einen ganzen Bogen auf $|z| = 1$ frei. Im ersten Falle heißen die den Randwegen entsprechenden idealen Randelemente konform äquivalent. Bildet man $|z| \leq 1$ so auf einen Kreissektor konform ab, daß l^1 und l^2 zwei Radien von gleicher Länge R entsprechen, so ist die „konforme Länge“ R im Falle 1) $R = \infty$, im Falle 2) $R < \infty$. Verf. bemerkt, daß bei der Ableitung von Kriterien für die Äquivalenz zweier Randwege der Begriff des Moduls eine Rolle spielt.

Wittich (Karlsruhe).

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

● **Maak, W.: Fastperiodische Funktionen.** (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 61.) Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1950. VIII, 240 S. DM 21,60; Ganzleinen DM 24,60.

The present book treats the theory of almost periodic (a. p.) functions in groups, and thus the representation theory for arbitrary groups with limitation to bounded, finite-dimensional representations. The book is divided into seven chapters I—VII. — I brings the classical representation theory for finite groups. It starts with the finite cyclic groups where everything is simple and the germ to the general theory appears. For arbitrary finite groups the theory is given a form which can serve as prototype for the theory in infinite groups. In II, then, von Neumann's theory for almost periodic (a. p.) functions in groups is developed. The decisive mean value theory is presented in the beautiful form given to it by the author, where the problem of defining the mean value is solved by help of an interesting combinatorial lemma (the marriage problem). The course followed towards the main results has recently been described by the author in a separate paper (this Zbl. 34, 215). Its first goal is the main theorem that every closed right-invariant module of a. p. functions is a sum of irreducible, finite-dimensional right-invariant modules. Closure is formed with respect to uniform convergence, and a non-void set of a. p. functions is called a right-invariant module if the set together with f and g contains $\alpha f + \beta g$ (α and β constants) and together with $f(x)$ contains $f(xa)$. The sum appearing in the theorem is formed by taking finite sums of functions from the components and next forming the closure. This theorem contains the usual main theorem which characterizes the a. p. functions as the functions which can be uniformly approximated by „trigonometric polynomials“, i. e. finite linear combinations of elements in unitary representations of the group. The proof does not make any recourse to the theory of Fourier series. — In III the theory is applied to the continuous periodic functions of a finite number of real variables, but this theory is also established independently by help of Fejér's theorem on summation of the Fourier series of the periodic function. In IV, Bohr's theory of the usual a. p. functions of a real variable is treated as a special case of the general theory. But also here a direct approach is given, namely by help of the simplest known and very interesting Bogoliouboff proof of the approximation theorem, in the version given by Jessen in his review of Bogoliouboff's paper [Ann. Chaire Phys. Math. Kiev 4, 195—205 (1939); this Zbl. 22, 332]. The main ingredient in the proof is a lemma on an infinite set of integers. The theory of Fourier series met with already in III is now developed for usual a. p. functions, and thus we are orientated for treating in V Fourier series in the general group case under which falls the Bochner-von Neumann summation theory. As an application of this theory a theorem of Bohr is proved to the effect that the Fourier series of a usual a. p. function is absolutely and uniformly convergent if its Fourier exponents are rationally independent. — In VI the general theory of a. p. functions is applied to continuous functions on compact groups. For simplicity the group topology is introduced by help of an invariant distance notion. As probably the most important application of the theory of a. p. functions the author now aims at von Neumann's theorem that every compact, finite-dimensional group is a Lie group (whereby Hilbert's V. problem is solved in the compact case). As remarked by the author, this part of the book may serve as a convenient introduction to the theory of continuous groups and their representations. Tools in the proof are the exponential function and the logarithm of a matrix together with the infinitesimal ring of the group. The rest of VI is devoted to a proof of van der Waerden's theorem, stating that every bounded representation on a semi-simple group is continuous. It follows

that on such groups all a. p. functions are continuous. — In VII we pass to the Weyl theory of a. p. functions on a homogeneous space \mathfrak{H} , i. e. a set \mathfrak{H} to which there is associated a transitive group of transformations of \mathfrak{H} . This is a more general notion than that of an a. p. function on a group, but the theory of these latter functions can easily be applied to the more general case. The main result is that the set of all a. p. functions on \mathfrak{H} is sum of irreducible, finite-dimensional invariant modules. As an important example, the a. p. functions on the sphere (with respect to the rotation group) is considered. The main theorem together with an investigation of the rotation group shows that every a. p. function on the sphere can be approximated by linear combinations of spherical harmonics. A consequence is that the a. p. functions on the sphere are exactly all continuous functions on the sphere. — Finally, in an appendix, the author gives a short review of the history of a. p. functions with many references to the literature. Here those parts of the theory which were not treated in the book have been given special notice. — By limitation to a certain, but very important and beautiful part of the theory of a. p. functions the author has succeeded in writing a book which at the same time as it contains all proofs (with exception of a few dimension proofs) enters into many domains of mathematics and centers around deep-lying structure investigations from the modern group theory. Everywhere the author has laid weight on clarifying the motives and analogies by the development of the various notions and theorems.

E. Følner (Copenhagen).

Maak, Wilhelm: Summierung der Fourierreihen gleichartig fastperiodischer Funktionen auf Gruppen. *Math. Z.*, Berlin 52, 770—778 (1950).

Nach der Definition des Verf. ist die auf der Gruppe G definierte Funktion $f(x)$ dann fastperiodisch (fp.), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilung $T(f; \varepsilon)$ von G in endlich viele Teilmengen A_1, \dots, A_n derart gibt, daß für beliebige in demselben Teile A_i gelegene Punkte x, y gilt:

$$\sup_{c, d \in G} |f(cx) - f(cy)| < \varepsilon.$$

Diese, mit der ursprünglich von J. v. Neumann [Trans. Amer. math. Soc. 36, 445—492 (1934); dies. Zbl. 9, 349] gegebenen äquivalente Definition legt die folgenden Begriffsbildungen nahe: Eine Menge F von fp. Funktionen auf G heißt gleichgradig fp., wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine gemeinsame Teilung $T(f; \varepsilon)$ für alle $f \in F$ existiert. Die Funktion $g(x)$ heißt gleichartig fp. wie die Funktion $f(x)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß jede Teilung $T(f; \delta)$ zugleich eine Teilung $T(g; \varepsilon)$ ist. — Ziel der Note ist, zu zeigen, daß diese Begriffe eine einfachere Formulierung und Beweis des Bochner-Neumannschen Summationssatzes für die Fourierschen Reihen fp. Funktionen gestatten [vgl. S. Bochner-J. v. Neumann, Trans. Amer. Math. Soc. 37, 21—50 (1935); dies. Zbl. 11, 160; sowie E. R. van Kampen, Ann. Math., Princeton, II. S. 37, 78—91 (1936); dies. Zbl. 14, 17].

Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Nielsen, Jakob: A study concerning the congruence sub-groups of the modular group. *Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* 25, Nr. 18, 32 S. (1950); 4.00 dkr.

Es sei q eine Primzahl > 5 mit der Primitivwurzel z ; q werde als Modul der im folgenden auftretenden Kongruenzen verstanden. Auf der Menge \mathfrak{T} der Restetripel $\{\varrho, \sigma, \omega\}$, wo $\varrho \not\equiv 0$ und $\sigma \bmod q, \omega \bmod (q-1)/2$ laufen, wird eine Abbildung $g\{\varrho, \sigma, \omega\}$, auf der Menge der Tripel von \mathfrak{T} mit $\varrho \not\equiv -1$ wird eine weitere Abbildung $G\{\varrho, \sigma, \omega\}$ elementar-arithmetisch erklärt; g^2 und G^3 sind die Identität I . — Es lassen sich $\frac{1}{2}(q^2-1)$ orientierte Polygone von je q Seiten dadurch zu einer geschlossenen Fläche Φ zusammenfügen, daß man ihre Seiten den Tripeln $\{0, \sigma, \omega\}$ und denen von \mathfrak{T} in bestimmter Weise zuordnet, wobei die involutorische Transformation g die Koinzidenz zweier Seiten verschiedener Polygone ausdrückt, während

I, G, G^2 die Dreier-Zykeln in den sämtlichen Ecken darstellt. Φ hat das Geschlecht $\frac{1}{24}(q^2 - 1)(q - 6) + 1$. Da die Fundamentalgruppe von Φ bekanntlich von den Überschreitungen der Seiten der Polygone erzeugt wird, lassen sich ihre Erzeugenden ebenfalls auf die $\{0, \sigma, \omega\}$ und die $\{\varrho, \sigma, \omega\} \subset \mathfrak{T}$, ihre definierenden Relationen auf die durch I, G, G^2 dargestellten Eckenumläufe beziehen. — In der abstrakten Gruppe F mit den Erzeugenden S, T und den definierenden Relationen $S^q = T^2 = (ST)^3 = 1$ wird ein System von Worten gebildet, die den Tripeln $\{0, \sigma, \omega\}$ von \mathfrak{T} explizit zugeordnet sind und in diesem Sinne den definierenden Relationen der Fundamentalgruppe von Φ genügen. Die von diesen Worten erzeugte Untergruppe H von F erweist sich als isomorph zu der Fundamentalgruppe von Φ . Überdies können H und F als Bewegungsgruppen der hyperbolischen Geometrie gedeutet werden, von denen F einen dreieckigen, H einen dem obigen Φ entsprechenden Fundamentalbereich besitzt, der aus $\frac{1}{2}q(q^2 - 1)$ solchen Dreiecken besteht, und dessen $\frac{1}{2}(q^2 - 1)$ Dreieckssterne das Zusammenhangsschema der q -Ecke von Φ realisieren. Die Regularität der dabei auftretenden geometrischen Überdeckung läßt sich als Normalteiler-Eigenschaft von H in F rechnerisch bestätigen. — Die damit gewonnenen Aussagen gestatten die folgende Interpretation im Bereich der Modulgruppe $\Gamma(1)$: Bezeichnet man wie üblich als Hauptkongruenzgruppe und mit $\Gamma(q)$ die Gruppe der Moduls substitutionen $L\tau$ mit $L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mit $P(q)$ die von den (parabolischen)

$A^{-1}U^qA$ ($A \subset \Gamma(1)$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) erzeugte Untergruppe von $\Gamma(q)$, so kann man F mit $\Gamma(1)/P(q)$, H mit $\Gamma(q)/P(q)$ und die Modulargruppe $\Gamma(1)/\Gamma(q)$ mit F/H identifizieren. Daher ergibt sich ein Erzeugendensystem von $\Gamma(q)$ in der Vereinigung der $\frac{1}{2}(q^2 - 1)$ Substitutionen $A^{-1}U^qA$ ($A \subset \Gamma(1)$) mit nach $\Gamma(q)$ inäquivalenten Spitzen $A^{-1}\infty$ und den oben genannten, den Tripeln von \mathfrak{T} zugeordneten Worten, in denen S durch U , T durch $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zu ersetzen ist. Die letzteren bilden ein Erzeugendensystem von $\Gamma(q)/P(q)$, dessen definierende Relationen explizit bekannt sind. — Zum Schluß gibt Verf. einen ausführlichen Hinweis auf die Arbeit von H. Frasch [Math. Ann., Berlin 108, 229—252 (1933); dies. Zbl. 6, 246].

Petersson (Hamburg).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Töpfer, Hans: Über die meromorphen Lösungen der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$ mit rationalen $R_\nu(z)$. Math. Z., Berlin 52, 436—471 (1949).

Die Auflösung der Differenzengleichung $F(z+1) = \frac{R_1(z)F(z) + R_2(z)}{F(z) + R_3(z)}$, $R_\mu(z)$ rationale Funktionen, stützt Verf. auf zwei Sätze über die meromorphen Lösungen von $f(z+1) = H(z, f(z))$ bzw. $g(z) = H(z, g(z+1))$, $H(u, v)$ eine für alle endlichen u, v meromorphe Funktion. Unter gewissen Bedingungen stellt

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} H\{z-1, H[z-2, H[z-3, \dots, H[z-n, K(z, n)]]\}$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(z-n-1, K(z, n+1))}{K(z, n)} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(z-n, K(z, n))}{K(z+1, n)} = 1 \right)$$

in einem Gebiete G eine Lösung von $f(z+1) = H(z, f(z))$ dar. Eine entsprechende Darstellung gilt für $g(z)$. Mit diesen Hilfsmitteln wird zunächst der Fall $f(z+1) = R(z)/(1+f(z))$ mit rationalem $R(z)$ erledigt. Verf. kommt zu Lösungen, die i. a. in $|z| < \infty$ meromorph sind, in einigen Sonderfällen zumindest in einer

Halbebene. Auf diese Differenzengleichung wird dann die im Titel genannte Differenzengleichung reduziert und allgemein gelöst. Hinweis auf Zusammenhänge mit homogenen Differenzengleichungen zweiter Ordnung. *Wittich (Karlsruhe).*

● **Golomb, Michael and Merrill Shanks:** *Elements of ordinary differential equations*. I. ed. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1950. IX, 356 p.

Il volume, quasi unicamente dedicato alle equazioni differenziali ordinarie lineari, passa in rapida rassegna i principali metodi per la ricerca dell'integrale generale e per la costruzione di integrali particolari determinati dai dati di Cauchy. — E' supposto che il lettore possieda unicamente le nozioni di analisi che si impartiscono in un corso istituzionale, e il suo interesse per la materia è suscitato da appropriati esempi tratti dalla meccanica e dalle matematiche applicate i quali servono ad illustrare i vari tipi di equazioni considerate nel testo. — Il volume contiene tre appendici di carattere meno elementare, e otto capitoli di cui riportiamo qui l'indice: 1. Rivista e raccolta di formule; 2. Fondamenti geometrici per le equazioni differenziali del primo ordine; 3. Tecnica per risolvere le equazioni del primo ordine; applicazioni; 4. Equazioni differenziali del secondo ordine; 5. Equazioni differenziali di ordine superiore a coefficienti costanti; 6. Algebra dell'operatore inverso. Sistemi di equazioni differenziali lineari; 7. Equazioni differenziali con coefficienti variabili; 8. Sviluppj in serie. Alcune equazioni classiche.

Giovanni Sansone (Firenze).

Dieudonné, J.: *Deux exemples singuliers d'équations différentielles*. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 38—40 (1950).

Bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen $x' = f(t, x)$, wo x und f n -dimensionale Vektoren sind, gelten bekanntlich die Tatsachen, daß bei stetigem f durch jeden Punkt mindestens eine Integralkurve und, wenn f noch in jedem Punkt eine Lipschitzbedingung erfüllt, auch nur eine Integralkurve geht. Es wird gezeigt, daß diese Tatsachen in einem unendlich-dimensionalen Banach-Raum nicht mehr zu gelten brauchen.

Kamke (Tübingen).

Gradžstein, I. S.: *Über das Verhalten der Lösungen eines Systems von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die im Limes entarten*. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 13, 253—280 (1949) [Russisch].

Verf. nimmt das oft in Sonderfällen betrachtete Problem der angenäherten Lösung einer Differentialgleichung oder eines Systems von Differentialgleichungen durch Vernachlässigung der Glieder mit Ableitungen höherer Ordnung, deren Koeffizienten klein sind, und der Frage, inwieweit man dadurch wirklich von Fall zu Fall Näherungslösungen erhält, in einem sehr weit ausgedehnten Rahmen in Angriff. Es wird folgender Satz bewiesen: Es seien zwei Systeme von linearen Differentialgleichungen gegeben:

$$\sum_{j=1}^n [a_{ij}^{(0)}(\eta) + a_{ij}^{(1)}(\eta)p + a_{ij}^{(2)}(\eta)p^2 + \cdots + a_{ij}^{(m)}(\eta)p^m + \alpha_{ij}^{(1)}(\eta)\eta p^{m+1} + \alpha_{ij}^{(2)}(\eta)\eta^2 p^{m+2} + \cdots + \alpha_{ij}^{(\mu)}(\eta)\eta^\mu p^{m+\mu}] X_j = \psi_i(t, \eta).$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \alpha_{ij}^{(0)}(\eta) = a_{ij}^{(m)}(\eta))$$

und

$$\sum_{j=1}^n [a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}p + a_{ij}^{(2)}p^2 + \cdots + a_{ij}^{(m)}p^m] x_j = \psi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

p bedeute den Differentialoperator d/dt . Die konstanten Koeffizienten des ersten Systems hängen von einem Parameter η ab. Sie besitzen bei $\eta \rightarrow 0$ Grenzwerte $a_{ij}^{(k)}$ bzw. $\alpha_{ij}^{(k)}$, die gleich den entsprechenden konstanten Koeffizienten des zweiten Systems sind, soweit sie dort auftreten. Zwischen den Anfangswerten der gesuchten

Funktionen beider Systeme und ihren Ableitungen bestehen die Bedingungen:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[\sum_{l=1}^{m-k} a_{ij}^{(l+k)}(\eta) X_j^{(l-1)}(0, \eta) + \sum_{l=1}^{\mu} \alpha_{ij}^{(l)}(\eta) X_j^{(m-k+l-1)}(0, \eta) \eta^l \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{m-k} a_{ij}^{(l+k)}(\eta) x_j^{(l-1)}(0) + o(1) \quad (k=0, 1, \dots, m-1; i=1, 2, \dots, n), \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{\mu-k} \alpha_{ij}^{(l+k)}(\eta) X_j^{(l-1)}(0, \eta) \eta^{l+k} = o(1) \quad (k=0, 1, \dots, \mu-1; i=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Die Funktionen $\psi_i(t, \eta)$ und $\psi_i(t)$ sind stetig für alle $t \geq 0$ vorausgesetzt, wobei bei $\eta \rightarrow 0$ $\psi_i(t, \eta)$ gleichmäßig in jedem endlichen Intervall $0 \leq t \leq T$ nach $\psi_i(t)$ strebt. Wenn dann das Polynom in ϱ , geschrieben als n -reihige Determinante $|\alpha_{ij}^{(0)} + \alpha_{ij}^{(1)}\varrho + \dots + \alpha_{ij}^{(\mu)}\varrho^\mu|$, der Hurwitzschen Bedingung genügt, d. h. die Realteile aller seiner Wurzeln negativ ausfallen, so gilt für jedes $t > 0$ $\lim_{\eta \rightarrow 0} X_j(t, \eta) = x_j(t)$

($j = 1, 2, \dots, n$), d. h. das erste System läßt sich zurecht näherungsweise für kleine Werte von η durch das einfachere zweite System ersetzen. Das Bestehen dieser Gleichung auch für $t = 0$ hängt von der Wahl der Anfangswerte der Funktionen ab und muß gesondert gefordert werden. — Dieser Satz ist bei wesentlich schärferen Nebenbedingungen für die Anfangswerte als den angegebenen vom Verf. schon in einer früheren Arbeit bewiesen worden [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 53, 391—394 (1946)], stellt aber noch nicht die allgemeinste Gestalt seiner diesmaligen Ergebnisse dar, sondern diese bezieht sich auf den Fall, daß die oben fest angenommenen höchsten Exponenten m und μ der einzelnen Anteile der Summen noch von i und j abhängig sind, in welchem Fall die Gleichungen, um nicht widerspruchsvoll zu sein, noch gewissen Zusatzbedingungen für die Anfangswerte genügen müssen. Dieser allgemeine Fall umfaßt lineare Gleichungssysteme, die teils aus algebraischen und teils aus Differentialgleichungen verschiedener Ordnungen bestehen. Die einzelnen unbekannten Funktionen können dabei in jede Gleichung in verschiedener Ordnung eingehen. — Die Beweismethode besteht in der Anwendung der Laplacetransformation auf die gegebenen Gleichungssysteme, um daraus bei Zerlegung der Lösungsfunktionen in Real- und Imaginärteil Ausdrücke für diese in Form von Cauchyschen Integralen abzuleiten, an denen der Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ ausgeführt werden kann, wodurch dann die Lösungen beider Systeme sich als in der angegebenen Weise gekoppelt erweisen. Als Hilfsmittel hat man entsprechend solche aus dem Bereich der Cauchyschen Integralfornel und der Residuentheorie anzuwenden und ferner solche rein algebraischer Natur, als einfachstes den Satz: Gegeben sei die algebraische Gleichung

$$\sum_{k=0}^m a_k(\eta) \lambda^k + \lambda^m \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_k(\eta) (\eta \lambda)^k = 0 \quad (a_m(\eta) \neq 0; \alpha_0(\eta) \neq 0; a_k(\eta) \rightarrow a_k, \alpha_k(\eta) \rightarrow \alpha_k)$$

mit $a_m = \alpha_0 \neq 0$ und $\alpha_\mu \neq 0$. Dann zerfallen für genügend kleine Werte von η die Wurzeln $\lambda_s(\eta)$ dieser Gleichung in zwei Gruppen: 1) μ große Wurzeln $\lambda_s(\eta) = \varrho_s(\eta)/\eta$ ($s = 1, 2, \dots, \mu$), wo die Funktionen $\varrho_s(\eta)$ bei $\eta \rightarrow 0$ zu den entsprechenden Wurzeln der Gleichung $\sum_{k=0}^{\mu} \alpha_k \varrho^k = 0$ streben, die alle von Null verschieden sind und 2) m kleine Wurzeln $\lambda_s(\eta)$ ($s = \mu + 1, \mu + 2, \dots, \mu + m$), die bei $\eta \rightarrow 0$ gegen die entsprechenden Wurzeln der Gleichung $\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k = 0$ streben — und weitgehende Verallgemeinerungen von ihm.

Svenson (Erlangen).

Volk, I. M.: Generalizations of the method of small parameters in the theory of periodic motions of non-autonomous systems. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 433—444 u. engl. Zusammenfassg. 444 (1947) [Russisch].

Verf. betrachtet im Anschluß an eine frühere Arbeit [Priklad. Mat. Mech., Moskva 10, 559—574 (1946)] das System von Differentialgleichungen

$$(1) \quad dx_\nu/dt = X_\nu(x_1, \dots, x_n, \mu, t) \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

in welchem die rechten Seiten X_ν in bezug auf t die Periode T besitzen. Die Funktionen X_ν sollen in einem Gebiet $G: a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu, |\mu| \leq \varrho, -\infty < t < \infty$ holomorph in t und den x_ν sein, meromorph in μ . Werden die rechten Seiten von (1) nach Potenzen von μ entwickelt, und wird von jeder dieser Entwicklungen das Glied mit kleinstem Exponenten genommen, so entsteht das „vereinfachte“ System

$$(2) \quad dx_\nu/dt = \mu^{k_\nu} Y_\nu(x_1, \dots, x_n, t) \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Verf. stellt Untersuchungen über das folgende Problem an: (2) möge die periodische Lösung $x_\nu = \varphi_\nu(\mu, t)$ mit der Periode mT besitzen (m ganz). Wann besitzt dann (1) periodische Lösungen $x_\nu = \varphi_\nu(\mu, t)$, so daß in dem Streifen $-\infty < t < \infty, |\mu| \leq \varrho' < \varrho$ gleichmäßig $|\varphi_\nu - \psi_\nu| < \varepsilon(\varrho')$? Lassen sich für die periodischen Lösungen von (1) Reihenentwicklungen angeben, welche Lösungen der eben beschriebenen Art approximieren? — Geeignete notwendige und hinreichende Bedingungen gibt Verf. zunächst für das lineare System

$$(2.1) \quad d\xi_\nu/dt = \mu^{k_\nu} (p_{\nu 1} \xi_1 + \dots + p_{\nu n} \xi_n + F_\nu) \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

an, worin die F_ν in einem Streifen der μ, t -Ebene erklärte stetige Funktionen sind, periodisch in t . Im Anschluß hieran werden die Eigenschaften von gewissen zu (2.1) gehörigen formalen Reihenentwicklungen erörtert. Aus diesen Eigenschaften werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz solcher Entwicklungen hergeleitet, welche periodische Lösungen von (2.1) darstellen. Dieses Ergebnis wird dann auf das System (1) verallgemeinert und führt zu einem Satz über die Existenz und Darstellbarkeit von gewissen periodischen Lösungen des Systems (1) durch konvergente Reihen. Am Schluß zwei Sätze über Sonderfälle des eingangs gestellten Problems.

Quade (Hannover).

Veltkamp, G. J. J.: Einiges über einfache Differentialgleichungen. *Mathematica, Groningen* 14, 100—116 (1947) [Holländisch].

Die vom Verf. verwandte Methode zur Auflösung linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung, die er nicht begründet, sondern nur an einigen einfachen Beispielen erläutert, besteht darin, daß man die linke Seite der Gleichung als „Polynom“ in dem Operator $D = d/dx$ auffaßt, dieses in „Faktoren“ zerlegt und dadurch die Gleichung auf solche erster Ordnung zurückführt. Das Verfahren lehnt sich also eng an die bekannte „symbolische“ Methode an und ist somit weder neu noch einwandfrei, wenn es auch, wie in den vorgerechneten Aufgaben, häufig zu richtigen Ergebnissen führt. Zur Kritik der Methode vgl. z. B. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin 1937 (dies. Zbl. 18, 129). W. Hahn.

Picone, Mauro: Ulteriore analisi quantitativa delle soluzioni di talune equazioni differenziali ordinarie. *Ann. Mat. pura appl., Bologna*, IV. S. 28, 195—203 (1949).

Consider the non linear system

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(t) + \sum_{k_1=1}^p A_{i,k_1}(t) x_{k_1} + \dots \\ &+ \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^p A_{i,k_1 \dots k_n}(t) x_{k_1} \dots x_{k_n}, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

where $f_i(t), A_{i,k_1}(t), \dots, A_{i,k_1 \dots k_n}(t)$ are complex valued functions of t measurable and bounded in the finite or infinite interval $I(t', t'')$. The following result concerning the domain of existence of solutions of (1) is established. Let a_0, \dots, a_n be non negative numbers such that in I we have

$$\sum_{i=1}^p |f_i(t)|^2 \leq a_0^2, \dots, \sum_{i,k_1, \dots, k_p=1}^p |A_{i,k_1 \dots k_p}(t)|^2 \leq a_p^2, \quad p = 1, \dots, n,$$

and consider an arbitrary vector $x^{(0)}$ with complex components $x_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}$ whose norm is indicated by $|x^{(0)}|$. Suppose $a_0 + |x^{(0)}| > 0$. Call λ^* the unique positive root of

$$a_0 + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu+1} (|x^{(0)}| + \lambda)^\nu (|x^{(0)}| - \nu \lambda) = 0$$

and put $r^* = \lambda^* \int_{\nu=0}^n a_\nu (|x^{(0)}| + \lambda^*)^\nu$. Then, if t_0 is a point of I , there exists, in the set of points of I for which $|t - t_0| \leq r^*$, one and only one solution of (1) verifying the initial conditions $x_i(t_0) = x_i^{(0)}$. Furthermore the norm of the vector $x(t) - x^{(0)}$, whose components are $x_i(t) - x_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, p$, satisfy the relation

$$|x(t) - x^{(0)}| \leq \lambda^* |t - t_0| / r^* \leq \lambda^*.$$

An application is made to the determination of intervals in which a solution of a linear homogeneous differential equation does not vanish. For the second order equation an upper bound of the number of zeros contained in an interval is also given.

Peixoto (Chicago, Ill.).

Wintner, Aurel: On free vibrations with amplitudinal limits. Quart. appl. Math. 8, 102—104 (1950).

Sei $A(t)$ eine reelle quadratische Matrix, deren Elemente für $t_0 \leq t < \infty$ stetige Funktionen sind. $\lambda(t)$ und $\mu(t)$ mögen den kleinsten bzw. größten Eigenwert der symmetrischen Matrix $\frac{1}{2}(A + A')$ bezeichnen. Sind dann die Integrale $\int_0^\infty \lambda(t) dt$, $\int_0^\infty \mu(t) dt$ konvergent, so strebt der Betrag $r(t) = |x(t)|$ eines jeden Lösungsvektors $x(t)$ von $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ einem endlichen, nicht verschwindenden Grenzwert zu. Beweis: Mit $x(t) = r(t)e(t)$, wo $e(t)$ Einheitsvektor, erhält man sofort $\lambda(t) \leq d \log r(t)/dt = e(t)A(t)e(t) \leq \mu(t)$.

F. W. Schäfke.

Levitan, B. M.: Zum Entwicklungssatz nach Eigenfunktionen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 605—608 (1950) [Russisch].

Es sei $\varphi(x, \lambda)$ in $0 \leq x < \infty$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'' + [\lambda - q(x)]y = 0, \quad \varphi(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad \partial \varphi(0, \lambda) / \partial x = -\cos \alpha.$$

Es gilt die Parsevalsche Formel $\int_0^\infty f^2(x) dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda) d\rho(\lambda)$; dabei ist $f(x)$ eine in $0, \infty$ Lebesgue-integrable Funktion, α reell, $\rho(\lambda)$ eine von $f(x)$ unabhängige, monoton wachsende Funktion von λ und $F(\lambda)$ eine verallgemeinerte Fourier-Transformierte von $f(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda) = 0 \quad \text{mit} \quad F_n(\lambda) = \int_0^n f(x) \varphi(x, \lambda) dx.$$

Verf. beweist dann die Abschätzungen für die Größenordnung von $\rho(\lambda)$: Im Falle $\sin \alpha = 0$ ist $\rho(\mu) \leq \frac{\pi}{4} \sqrt{\mu^3} + O(\sqrt{\mu})$ für $\mu \rightarrow \infty$; im Falle $\cos \alpha = 0$ gilt $\rho(\mu) \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)$, und für $\sin \alpha \cos \alpha \neq 0$ gilt $\rho(\mu) \leq \frac{\pi}{2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\mu} + O(1)$.

Collatz (Hannover).

Mikelandze, Š. E.: Eine neue Methode zur Lösung von Eigenwertproblemen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 553—556 (1949) [Russisch].

Angabe einiger Beispiele zu einer früheren Arbeit des Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 52, 753—755 (1946)] über eine Methode der Lösung von Eigenwertproblemen einer homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung. Diese besteht im wesentlichen in einer Überführung der Differentialgleichung in eine Volterrasche Integralgleichung, deren Lösung mittels der Methode aufeinander

folgender Näherungen und einer daraus mit Hilfe der gegebenen Randbedingungen folgenden Aufstellung eines Systems von linearen algebraischen Gleichungen für die unbekannten Randwerte der Funktion und ihrer Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung. Die Forderung der Vereinbarkeit der Gleichungen dieses Systems führt dann zur Aufstellung der charakteristischen Gleichung für die Eigenwerte. Die Beispiele betreffen transversale Schwingungen einer eingespannten Saite, freie Schwingungen eines an einem Ende eingespannten Stabes, ferner die Gleichgewichtslage eines Trägers, der auf eine homogene elastische Grundlage gebettet ist und mit einem Ende auf einer festen Unterlage ruht und an diesem selben Ende einem Moment unterworfen ist. Sie werden andeutungsweise bis zu zahlenmäßigen Ergebnissen für die Eigenwerte durchgeführt. *Svenson* (Erlangen).

Zwirner, Giuseppe: Un teorema di unicità per gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. *Ann. Mat. pura appl.*, Bologna, IV. S. 29, 327—334 (1949).

Let f and g be real and defined in the domain $S: a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty$, and consider the system (1) $y' = f(x, y, z)$, $z' = g(x, y, z)$, with the boundary conditions (2) $y(a) = \alpha$, $z(b) = \beta$. The following uniqueness theorem is proved. Suppose that: (3) $f(x, y, z)$ and $g(x, y, z)$ are non decreasing (non increasing) in z and y respectively;

$$(4) \quad f(x, y_2, z) - f(x, y_1, z) \leq \theta(x) \varphi(y_2 - y_1), \quad y_1 < y_2,$$

$$(5) \quad g(x, y, z_2) - g(x, y, z_1) \geq \theta_1(x) \varphi_1(z_2 - z_1), \quad z_1 < z_2,$$

where $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ are integrable in $a \leq x \leq b$ and $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ are positive continuous functions for $u > 0$ such that if $\delta > \varepsilon > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{du}{\varphi(u)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{du}{\varphi_1(u)} = +\infty.$$

Then there exists in $a \leq x \leq b$ at most one pair of absolutely continuous functions $y(x)$, $z(x)$ satisfying (1) almost everywhere and satisfying the boundary conditions (2). — This theorem generalizes three previous results of Scorza Dragoni [*Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 12, 30 (1941); this Zbl. 26, 222; and *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VI. S. 22, 44 (1935); this Zbl. 12, 257]. Conditions are also given such that if $y'_1 = f(x, y_1, y'_1)$, $y'_2 = g(x, y_2, y'_2)$, with $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, then the inequalities $y_1(a) \geq y_2(a)$, $y_1(b) \geq y_2(b)$ imply $y_1(x) \geq y_2(x)$ for $a \leq x \leq b$. *Peixoto* (Chicago, Ill.).

Mises, R. v.: Die Grenzschichte in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. *Acta Sci. math.*, Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 29—34 (1950).

Die reellen Funktionen $f(x, y)$, $g(x, y)$ seien in dem Rechteck $x_1 \leq x \leq x_2$, $a \leq y \leq b$ stetig und beschränkt, ferner sei $g > 0$. Schließlich seien die Integralkurven von

$$u'(x) + f(x, u) = 0, \quad v'(x) + f(x, v) = 0$$

durch die Anfangswerte $u(x_1) = y_1$, $v(x_2) = y_2$ eindeutig bestimmt und mögen für das ganze Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ existieren und in dem Rechteck verlaufen. — Wenn die Randwertaufgabe

$$\lambda g(x, y) y'' + y' + f(x, y) = 0, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

für alle hinreichend kleinen positiven oder negativen λ eine Lösung $y_\lambda(x)$ besitzt, so ist für jedes $\varepsilon > 0$ bei $\lambda > 0$: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} y_\lambda(x) = u(x)$ gleichmäßig in $x_1 \leq x \leq x_2 - \varepsilon$,

bei $\lambda < 0$: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} y_\lambda(x) = v(x)$ gleichmäßig in $x_1 + \varepsilon \leq x \leq x_2$. Vgl. hierzu auch

M. Nagumo [*Proc. phys.-math. Soc. Japan*, III. S. 21, 529—534 (1939); dies. Zbl. 22, 137].

Kamke (Tübingen).

Brock, John E.: Some non-linear systems permitting simple harmonic motion. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 238—243 (1950).

Die nichtlineare Differentialgleichung

$$F\left(-\frac{\ddot{x}}{x}, x^2 - \frac{x \dot{x}^2}{\ddot{x}}\right) = 0$$

wobei F eine willkürliche Funktion zweier Veränderlicher ist, hat die Lösungen $x = A \sin(\omega t + \Phi)$, wenn $F(\omega^2, A^2) = 0$ ist. Man hat so die Möglichkeit, eine Anzahl nichtlinearer Differentialgleichungen hinsichtlich des Verhaltens ihrer Lösungen, Eindeutigkeit bei Vorgabe von Anfangswerten, Verzweigungen, Stabilität usw. zu untersuchen. Verf. diskutiert die beiden Fälle $\omega^2 = M^2/A^4$ und $\omega^2 = b/(cA^2 + d)$ ausführlich an Hand von x - \dot{x} -Diagrammen und stellt dabei verschiedene Verzweigungserscheinungen fest. *Collatz* (Hannover).

Reeb, Georges: Sur les trajectoires fermées de certains champs de vecteurs. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1097—1098 (1949).

Verf. betrachtet ein System von Differentialgleichungen (*) $dx_i/dt = f_i(x, \mu)$ auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit V^n , das von einem Parameter μ abhängt. Die Lösungskurven von $dx_i/dt = f_i(x, 0)$ sollen so beschaffen sein, daß sie die Fasern einer Faserung von V^n in Kreise mit der Basis V^{n-1} bilden. Es werden ohne Beweis notwendige Bedingungen für die Existenz geschlossener Lösungen des Systems (*) mitgeteilt. *Rinow* (Greifswald).

Reeb, Georges: Sur les solutions périodiques de certains systèmes différentiels canoniques. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1196—1198 (1949).

Anwendung der Ergebnisse der vorstehend besprochenen Note auf kanonische Systeme. Insbesondere wird das Beispiel der geodätischen Linien auf einer n -dimensionalen Sphäre mit der Metrik $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + \mu \sum \alpha_{ik} dx_i dx_k$ betrachtet. Die Anzahl der (orientierten) geschlossenen geodätischen Linien ist $\geq n(n+1)$. *Rinow* (Greifswald).

Reeb, Georges: Sur l'existence de solutions périodiques de certains systèmes différentiels perturbés. Arch. Math., Karlsruhe **2**, 205—206 (1950).

Diese Voranzeige betrifft die Existenz einer einfach geschlossenen Trajektorie zu einem Vektorfeld und die Existenz einer periodischen Lösung des Differentialgleichungssystems

$$x'_v(t) = u_v, \quad u'_v(t) = -\omega_v^2 x_v + f_v(x, u)$$

mit konstantem ω_v für $v = 1, \dots, r$. *Kamke* (Tübingen).

Turrittin, H. L.: Stokes multipliers for asymptotic solutions of a certain differential equation. Trans. Amer. math. Soc. **68**, 304—329 (1950).

L'equazione

$$(1) \quad d^n y/dx^n - x^v y = 0, \quad v \text{ intero positivo}, \quad n \geq 2,$$

possiede n soluzioni indipendenti

$$(2) \quad y_j(x) = X^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} X^{pk} g(kp + j - 1) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

dove $p = n + v$, $X = x p^{-n/p}$, $g(w) = 1 \prod_{k=1}^n \Gamma[(w + p + 1 - k)/p]$,

e le serie (2) sono convergenti in tutto il piano complesso. Questo, dalle semirette di anomalia $\pi h/p$, ($h = 0, \dots, 2p - 1$), è diviso in $2p$ settori a ciascuno dei quali appartengono [Trjintzinsky, questo Zbl. **8**, 255] n soluzioni indipendenti $\bar{y}_\mu(x)$ della (1) rappresentabili asintoticamente con le formule

$$(3) \quad \bar{y}_\mu(z) \sim A_\mu(x) = C Y_\mu^{1-t} e^{Y_\mu} \sum_{m=0}^{\infty} c_m Y_\mu^{-m}$$

con $Y_\mu = (n/p) x^{p/n} e^{2\pi i \mu/n}$, C, t, c_m costanti; $\mu = -N, \dots, P$, con $P = N = (n-1)/2$ se n è dispari; $P = n/2$, $N = P - 1$ se n è pari. — Le (3) sussistono uniformemente

in ogni settore, lati inclusi. — Per ogni settore esiste un sistema di n relazioni lineari invertibile

$$y_j(x) = \sum_{\mu=-N}^P D_{j,\mu} \bar{y}_\mu(x) \quad (j=1, \dots, n)$$

tra le $y_j(x)$ e le $\bar{y}_\mu(x)$, e le costanti $D_{j,\mu}$, che l'A. vuol determinare, prendono il nome di moltiplicatori di Stokes. L'A., limitandosi, come è sufficiente, ad un settore, risolve il suo problema; l'unicità dei moltiplicatori è poi provata quando si consideri il settore definito dalla limitazione $|\arg x| \leq \pi n/2p$ se n è dispari, e dalla limitazione $-\pi(n+1)/2p \leq \arg x \leq \pi(n-1)/2p$ se n è pari. *Sansone.*

Kolchin, E. R.: Existence theorems connected with the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations. Bull. Amer. math. Soc. 54, 927—932 (1948).

Die Picard-Vessiot'sche Theorie, wie sie vom Verf. entwickelt wurde [Ann. Math., Princeton, II. S. 49, 1—42 (1948)], geht aus von einem differenzierbaren Körper J der Charakteristik Null mit einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper C . Eine differenzierbare Körpererweiterung G von J heißt eine Picard-Vessiot-Erweiterung von J , wenn es erstens ein Differentialpolynom $L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y$ ($p_i \in J$) mit einem Fundamentalsystem η_1, \dots, η_n von Lösungen gibt, so daß $G = J\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ ist, und wenn zweitens der Konstantenkörper von G gleich C ist. Ist K eine differenzierbare Körpererweiterung von J mit C als Konstantenkörper, die aus J durch Adjunktion von Integralen, Exponentialen von Integralen und algebraischen Funktionen hervorgeht, so heißt K eine Liouvillesche Erweiterung von J . Die Picard-Vessiot'sche Theorie gibt eine gruppentheoretische Antwort auf die Frage, wann eine Picard-Vessiot-Erweiterung eine Liouvillesche Erweiterung ist. In jedem Fall tritt wesentlich die Forderung auf, daß der Konstantenkörper bei der Erweiterung erhalten bleibt. In der vorliegenden Arbeit leitet Verf. zwei Ergebnisse her für den Fall, daß man auf diese Forderung verzichtet. — Ausgangspunkt ist ein Satz von J. F. Ritt über algebraische Differentialgleichungen: Π sei ein differenzierbares Primideal im Ring $J\{y_1, \dots, y_n\}$ aller Differentialpolynome in Unbekannten y_1, \dots, y_n mit Koeffizienten aus J . Ferner sei $F \in J\{y_1, \dots, y_n\}$, aber $F \notin \Pi$, und es sei $\Pi_0 = \Pi \cap J\{y_1, \dots, y_n\}$. Dann gibt es ein $F_0 \in J\{y_1, \dots, y_n\}$ mit $F_0 \notin \Pi_0$ derart, daß jede Lösung η_1, \dots, η_n von Π_0 , die keine Lösung von F_0 ist, erweitert werden kann zu einer Lösung η_1, \dots, η_n von Π , die keine Lösung von F ist. Mit Hilfe dieses Satzes zeigt Verf. zunächst: Σ sei eine echte Teilmenge von $J\{y_1, \dots, y_n\}$, und es sei ferner $F \in J\{y_1, \dots, y_n\}$, aber $F \notin \Sigma$, dem durch Σ erzeugten Ideal. Dann besitzt Σ eine Lösung η_1, \dots, η_n , die F nicht annulliert; der Konstantenkörper von $J\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ bleibt dabei C . Als einfache Folgerung [an Stelle von F tritt die Wronskische Determinante $W(y_1, \dots, y_n)$] ergibt sich hieraus das erste Resultat: Es sei $L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y \in J\{y\}$. Dann besitzt $L(y)$ ein Fundamentalsystem η_1, \dots, η_n von Lösungen derart, daß C wiederum der Konstantenkörper von $J\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ ist. — Die Körpererweiterungen, die man durch Adjunktion von Integralen, Exponentialen von Integralen und von algebraischen Funktionen erhält, lassen sich in zehn wesentliche Typen einteilen. Σ, F mögen dieselbe Bedeutung wie oben haben, und es sei ξ_1, \dots, ξ_n eine Lösung von Σ , die F nicht annulliert. Ist dann $J\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ in einer Erweiterung von J enthalten, die einem der zehn erwähnten Typen angehört, so besitzt Σ auch eine Lösung η_1, \dots, η_n , die F nicht annulliert und die die Eigenschaft hat, daß $J\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ sogar in einer Liouvilleschen Erweiterung von J vom selben Typ enthalten ist. Aus diesem Satz ergibt sich nun als Folgerung das zweite Resultat: $L(y) \in J\{y\}$ sei linear irreduzibel über J . Besitzt $L(y)$ eine Lösung in einem Erweiterungskörper von J , der einem der zehn Typen angehört, so besitzt $L(y)$ sogar ein Fundamentalsystem η_1, \dots, η_n derart, daß $J\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ eine Liouvillesche Erweiterung über J vom selben Typ ist. *Kowalsky.*

Cohn, Richard M.: A note on the singular manifolds of a difference polynomial. Bull. Amer. math. Soc. 54, 917—922 (1948).

Für ein Differenzenpolynom in n Unbekannten y_1, \dots, y_n wird der Begriff der wesentlichen, singulären Mannigfaltigkeit in folgender Weise erklärt: Eine wesentliche, irreduzible Mannigfaltigkeit eines algebraisch irreduziblen Differenzenpolynoms A in Unbekannten y_1, \dots, y_n heißt singulär hinsichtlich y_k ($1 \leq k \leq n$), wenn sie ein Polynom annulliert, das y_k nicht enthält oder von kleinerer Effektivordnung in y_k ist. Die Effektivordnung in y_k ist dabei erklärt als die Differenz zwischen der Ordnung der höchsten und der niedrigsten, wirklich auftretenden Transformaten von y_k . Diese Definition ist eine Verallgemeinerung des Falles einer Unbekannten, wie er vom Verf. ausführlich in einer früheren Arbeit behandelt

wurde (dies. Zbl. 31, 304). In Analogie zu den Ergebnissen von J. F. Ritt bei algebraischen Differentialgleichungen zeigt Verf., daß eine Mannigfaltigkeit, die singular hinsichtlich einer Unbekannten ist, diese Eigenschaft auch hinsichtlich jeder anderen in dem Polynom auftretenden Unbekannten besitzt. Die wesentlichen, irreduziblen Mannigfaltigkeiten eines algebraisch irreduziblen Differenzenpolynoms können demnach in zwei Klassen aufgeteilt werden: Singuläre und gewöhnliche Mannigfaltigkeiten. Der Beweis stützt sich auf einen Satz über die y_k -Separante eines Differenzenpolynoms A , die ebenso wie in der Theorie der algebraischen Differentialgleichungen als die partielle Ableitung $\partial A / \partial y_{kr_k}$ definiert ist, wobei r_k die Ordnung von A in y_k ist (y_{ki} ist die i -te Transformierte von y_k). Der Satz lautet: Eine wesentliche, irreduzible Mannigfaltigkeit des Differenzenpolynoms A in Unbekannten y_1, \dots, y_n , die singular hinsichtlich y_k ist, annulliert die y_k -Separante von A . Beim Beweis wird eine formale Potenzreihenentwicklung benutzt. Kowalsky.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

• Saltikov (Saltykow), N.: Methoden zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion. Srpska Akad. Nauka, Poseb. Izd. 139 (prirod. mat. Spisi 38), XVI und 749 S. (1947) [Serbisch].

* In diesem breit angelegten Werk gibt der Verf. eine ausführliche Darstellung der klassischen und einiger neueren Gesichtspunkte zur Integration partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion. Diesen Gegenstand hat der Verf. in mehreren Vorlesungsreihen in Belgien, Paris und Straßburg während der Dreißigerjahre in gleicher Richtung behandelt; man vergleiche darüber seine beiden Hefte im *Mémorial sci. math.* 50, 70 sowie einen Bericht über seine Conférence vor der Société math. France (dies. Zbl. 3, 113; 10, 297; 25, 52). Die dort kurz umrissenen Ideen sind hier ausgeführt. Zugleich ist eine Übersicht über das Gesamtgebiet angestrebt, die freilich der recht subjektiven Einstellung des Verf. ihr Gepräge verdankt: sie neigt dazu, den Standpunkt hervortreten zu lassen, der etwa auf Liouville, Jacobi u. a. fußt und in den zahlreichen Arbeiten Saltikows („éléments intégrables“) fortgeführt und nachdrücklich vertreten ist — während die Gesichtspunkte von Stekloff und die der Lieschen Schule dem Verf. wenig liegen. Immerhin ist im vorliegenden Werk je ein größeres Kapitel über die Konzeptionen von Lie und über Berührungstransformationen aufgenommen. Nur ganz vereinzelte Hinweise gelten dem Schrifttum seit 1900 (außer Saltikow). — Die Darstellung des Verf., in schweren äußeren Lebensumständen entstanden, darf als Zusammenfassung eines umfänglichen Lebenswerks vermerkt sein, auch wenn sie der Sprache nach nur wenigen zugänglich ist. — Inhalt: Definition und Auftreten partieller Differentialgleichungen. Euler und das Entstehen einer Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Untersuchungen von Lagrange und ihre Verallgemeinerung. Theorie linearer Gleichungen. Methoden von Lagrange und Charpit; Jacobis Verallgemeinerung. Charakteristikentheorie. Neue Jacobische Methode und Verallgemeinerung. Systeme partieller Differentialgleichungen. Theorie integrierbarer Elemente (hier die hauptsächlichsten eigenen Beiträge des Verf.). Die Gedanken von S. Lie in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Berührungstransformationen. Differentialinvarianten. Kanonische Gleichungen; Anwendungen auf Probleme der Dynamik. Gleichungen, die durch Trennung der Veränderlichen integrierbar werden. Anwendungen in der Himmelsmechanik (Zwei- und Dreikörperproblem). Egon Ulrich (Gießen).

Szarski, J.: Sur certaines inégalités entre les intégrales des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre. *Ann. Soc. Polonaise Math.* 22, 1—34 (1950).

Es handelt sich um Lösungen $u(x, y)$, $v(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung (1) $\partial z / \partial x = f(x, y, z, q)$; dabei steht y für y_1, \dots, y_n ; q für q_1, \dots, q_n ; q_r für $\partial z / \partial y_r$. — Voraussetzungen: (a) f ist nebst den partiellen Ableitungen erster Ordnung nach den y_r, z, q_r definiert und stetig in einem Gebiet $\mathcal{G}(x, y, z, q)$, es sind alle $|f_{q_r}| < A$, und die Ableitungen f_{y_r}, f_z, f_{q_r} erfüllen in bezug auf y, z, q Lipschitz-Bedingungen. (b) u und v sind Lösungen von (1) in dem Bereich

$$g: |x - \xi| < a, \quad |y_r - \eta_r| \leq a_r - A |x - \xi| \quad (v = 1, \dots, n)$$

mit $a_r > a, A > 0$; die Lösungen u, v sind aus Charakteristiken von (1) aufgebaut, die durch die Teilebene $x = \xi$ von g gehen; alle durch u, v gelieferten Flächenelemente gehören zu \mathcal{G} . (c) $u(\xi, y) > v(\xi, y)$. — Behauptung: $u(x, y) > v(x, y)$

in g. — Ein Satz ähnlicher Art ist von Nagumo, [Japan. J. Math. **15**, 51—56 (1938); dies. Zbl. **21**, 19] bewiesen. — Das Ergebnis ist ausgedehnt auf die Lösungen von Systemen

$$\frac{\partial z_v}{\partial x} = f_v \left(x, y, z_1, \dots, z_k, \frac{\partial z_v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_v}{\partial y_n} \right) \quad (v = 1, \dots, k).$$

Kamke (Tübingen).

Cinquini Cibrario, Maria: Sopra la teoria delle caratteristiche per i sistemi di equazioni quasi-lineari alle derivate parziali del primo ordine. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. **3**, 161—197 (1950).

Man betrachte das System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\sum_{j=1}^m \{A_{ij}(x, y, z_1, \dots, z_m) p_j + B_{ij}(x, y, z_1, \dots, z_m) q_j\} \\ = C_i(x, y, z_1, \dots, z_m), \quad (i = 1, \dots, m).$$

Die Determinante $|A_{ij}|$ sei $\neq 0$ und die Gleichung $|A_{ij} dy - B_{ij} dx| = 0$ habe nur reelle, einfache Wurzeln $dy/dx = \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$. Sind $h_i^{(r)}$ nicht sämtlich verschwindende Funktionen von x, y, z_1, \dots, z_m , für die das lineare Gleichungssystem

$\sum_{i=1}^m (A_{ij} \varrho_r - B_{ij}) h_i^{(r)} = 0$ gilt, so wird $y = f(x)$, $z_1 = \zeta_1(x), \dots, z_m = \zeta_m(x)$ eine charakteristische Kurve genannt, wenn sie für einen Wert von r dem Differentialgleichungssystem

$$dy = \varrho_r dx, \quad \sum_{i,j=1}^m h_i^{(r)} A_{ij} dz_j = \sum_{i=1}^m h_i^{(r)} C_i dx$$

genügt. Verf. gibt zuerst mehrere Existenzsätze unter verschiedenen Bedingungen beim Problem, eine Integralfäche $z_1 = z_1(x, y), \dots, z_m = z_m(x, y)$ zu finden, die eine gegebene charakteristische Kurve enthält und in den Punkten xy einer gegebenen Kurve der xy -Ebene einer vorgeschriebenen linearen Bedingung genügt. Die Beweise stützen sich auf frühere Arbeiten der Verf. (dies. Zbl. **31**, 161—162) und zeichnen sich wieder dadurch aus, daß sie keine Analytizitätsbedingungen, sondern bloß natürliche Regularitätsvoraussetzungen erfordern. Unter weiteren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen wird dann die Möglichkeit gegeben, charakteristische Streifen erster Ordnung und höherer Ordnungen einzuführen. Es wird gezeigt, daß eine charakteristische Kurve in unendlichvielen charakteristischen Streifen erster Ordnung und im allgemeinen ein charakteristischer Streifen n -ter Ordnung in unendlichvielen charakteristischen Streifen $(n+1)$ -ter Ordnung enthalten ist, die von einer willkürlichen Konstanten abhängen. Ein charakteristischer Streifen n -ter Ordnung mit der Stützkurve Γ ist in unendlichvielen Integralfächen enthalten, die in jedem Punkt der charakteristischen Kurve Γ eine Berührung n -ter Ordnung miteinander haben. Daraus ergeben sich Ergänzungen und Verschärfungen für die in bezug auf das Cauchysche Problem früher erhaltenen Resultate der Verf. G. Cimmino.

Cinquini-Cibrario, Maria: Sui sistemi di equazioni alle derivate parziali di ordine superiore. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. **29**, 147—161 (1949).

Die Verf. setzt mit dieser Arbeit eine Reihe von Untersuchungen fort, welche Existenzfragen im Kleinen für die Lösungen von Anfangswertproblemen bei Systemen partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus betreffen (dies. Zbl. **29**, 398; **30**, 358—359; **31**, 161—162; **32**, 164), wobei nicht wesentlich reduzierbare Regularitätsvoraussetzungen an Stelle der alten Goursatschen Analytizitätsvoraussetzungen treten. Hier handelt es sich um ein System von Gleichungen von beliebigen Ordnungen; der Existenz- und Eindeigkeitssatz für die Lösung des Cauchyschen Problems, den die Verf. für den Fall eines Systems von Gleichungen 1. Ordnung früher gewonnen hatte, wird auf den Fall der Systeme von höheren Ordnungen ausgedehnt, indem dieser Fall auf jenen zurückgeführt wird. Es wird

dann unter passenden Voraussetzungen gezeigt, daß der Satz auch dann gilt, wenn die charakteristischen Richtungen stets alle reell, aber nicht alle einfach sind. Es wird endlich bemerkt, daß im Sonderfalle eines quasi-linearen Systems einige Vereinfachungen auftreten.

G. Cimmino (Bologna).

Chu, E. L.: Upper and lower bounds of eigenvalues for composite-type regions. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 454—467 (1950).

Bei der Eigenwertaufgabe

$$L[u] + \lambda \varrho u = (p u_x)_x + (p u_y)_y - q u + \lambda \varrho u = 0 \quad (p > 0, \varrho > 0)$$

mit der Randbedingung $u = 0$ oder $\partial u / \partial n = 0$ am Rande Γ gehöre die Eigenfunktion u_1 zum kleinsten Eigenwert λ_1 . Dann ist eine Funktion $\sigma = \sigma(s)$ durch $(\partial u_1 / \partial n) + \sigma u_1 = 0$ auf Γ festgelegt. Man wähle die Funktion $u(s)$ so, daß $u(s) = 0$ auf Γ überall dort gilt, wo $\sigma = \infty$ wird. Nun löse man mit λ als Parameter die Randwertaufgabe $L[u] + \lambda \varrho u = 0$, $u = u(s)$ auf Γ . Dadurch ist auf Γ auch $\partial u / \partial n$ festgelegt in Abhängigkeit von λ . Man bestimme jetzt λ aus

$$\int_{\Gamma} p u \frac{\partial u}{\partial n} ds = - \int_{\Gamma} p \sigma u^2 ds.$$

Der so erhaltene Wert λ ist eine obere Schranke für λ_1 . Entsprechend wird eine untere Schranke aufgestellt; man wähle $\partial u / \partial n$ auf Γ beliebig, jedoch so, daß $\partial u / \partial n = 0$ dort gilt, wo $\sigma = 0$ ist. Durch Aufstellung einer Funktion $u(x, y)$ mit $L[u] + \lambda \varrho u = 0$ und den gewählten Werten von $\partial u / \partial n$ ergeben sich auch Werte $u(s)$, die noch von λ abhängen. Der durch

$$\int_{\Gamma} p u \frac{\partial u}{\partial n} ds = - \int_{\Gamma} \frac{p}{\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 ds$$

festgelegte Wert λ ist eine untere Schranke für λ_1 . Durch Heranziehen der Orthogonalitätsbedingungen werden entsprechende Aussagen für die höhern Eigenwerte gemacht, wobei Verf. für den Fall, daß nur Annäherungen für die niedrigeren Eigenfunktionen bekannt sind, Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen benutzt. Als Beweismittel werden nach den Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenwerte die Aussagen über das Wandern der Eigenwerte verwendet, wenn die Rand- und Stetigkeitsbedingungen gelockert oder geändert werden. Collatz (Hannover).

Berezin, I. S.: Über das Cauchysche Problem für eine lineare Gleichung zweiter Ordnung mit gegebenen Anfangswerten auf der Linie parabolischen Verhaltens. Mat. Sbornik, n. S. **24**, 301—320 (1949) [Russisch].

Es wird das Cauchysche Problem für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y^\alpha k^2(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z + f(x, y)$$

mit den Anfangsbedingungen $z(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{y=0} = \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$) in einem abgeschlossenen Gebiet G , dessen Rand das Intervall $\langle a, b \rangle$ der x -Achse enthält, längs der die Gleichung parabolischen Charakter hat, unter folgenden Bedingungen gelöst: $0 < \alpha < 2$, $k(x, y) \neq 0$ und zweimal stetig in G differenzierbar, die übrigen Koeffizientenfunktionen in G einmal und $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in $\langle a, b \rangle$ dreimal differenzierbar. Der Existenz- und Eindeigkeitssatz von zweimalstetig differenzierbaren Lösungen in einem Gebiet, das in G liegt und von Charakteristiken, die durch die Punkte $(a, 0)$ und $(b, 0)$ gehen, begrenzt wird, wird auf folgende Weise bewiesen. Zunächst wird durch die Substitution $u(x, y) = z(x, y) - y \psi(x) - \varphi(x)$ die Aufgabe auf die Lösung der gleichen Differentialgleichung für die Funktion $u(x, y)$, aber mit verschwindenden

Anfangswerten für $u(x, 0)$ und $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}$, zurückgeführt. Dabei ändert sich, nur das von den Unbekannten freie Glied. Nach Einführung der neuen unbekannten Funktionen $u_1 = u$, $u_2 = k(x, y) y^{\alpha/2} \partial u / \partial x + \partial u / \partial y$, $u_3 = -k(x, y) y^{\alpha/2} \partial u / \partial x + \partial u / \partial y$ und Aufstellung des entsprechenden Differentialgleichungssystems für sie mit den zugehörigen Anfangsbedingungen $u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = u_3(x, 0) = 0$ wird sodann mit Hilfe der Charakteristikenmethode gezeigt,

daß die neuen unbekannten Funktionen dem System der Integralgleichungen genügen:

$$u_1(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \int_0^{s_1} (u_2 + u_3) ds_1, \quad u_2(x_0, y_0) = \int_0^{s_2} \left[A u_1 + \frac{B_2}{y} u_2 + \frac{C_2}{y} u_3 + \Phi \right] ds_2,$$

$$u_3(x_0, y_0) = \int_0^{s_3} \left[A u_1 + \frac{B_3}{y} u_2 + \frac{C_3}{y} u_3 + \Phi \right] ds_3,$$

die sich regulär verhalten, weil $|u_i(x, y)| < K y$ mit $K = \max_{\bar{Q}} \left| \frac{\partial u_i}{\partial y} \right|$ gilt. Die neuen Koeffizientenfunktionen A, B_2, C_2, B_3, C_3 und Φ von x und y lassen sich dabei durch die ursprünglichen ausdrücken. Den Hauptraum der Arbeit nimmt der Beweis der Lösbarkeit dieses Integralgleichungssystems und der eindeutigen Bestimmtheit der Lösungen bei der Nebenbedingung $|u_i(x, y)| < K y$ ($K = \text{const}$) ein, ferner der Beweis der Umkehrung des obigen Sachverhalts, nämlich daß die Lösungen (mithin als einzige) auch dem Differentialgleichungssystem, also u_1 der ursprünglichen Differentialgleichung, genügen. Das wird durch die Methode aufeinanderfolgender Näherungen, verbunden mit geeigneten Abschätzungen, ohne Benutzung tiefer liegender Hilfsmittel ausgeführt. — In einem zweiten Teil wird gezeigt, daß das Cauchysche Problem im vorliegenden Fall korrekt gestellt ist, d. h. daß die Lösung in dem gefundenen Existenzbereich stetig von den gegebenen Anfangswerten $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ abhängt, ferner, daß die Bedingung $\alpha < 2$ dafür wesentlich ist. Für $\alpha > 2$ wird nämlich als Gegenbeispiel die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^{2+\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{die für die Anfangswerte } u(x, 0) - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

die Nulllösung besitzt, angeführt. In ähnlicher Weise, durch Übergang zu einer Integralgleichung und mit ihrer Hilfe ausgeführter Abschätzungen, wird gezeigt, daß diese Differentialgleichung für Anfangsfunktionen, die samt ihren Ableitungen beliebig klein bleiben, in einem beliebig schmalen Streifen längs der x -Achse Lösungen besitzt, die eine beliebig große vorgegebene Zahl überschreiten, also in unstetiger Weise von den Anfangsbedingungen abhängen. *Svenson.*

Tautz, Georg: Zur Theorie der ersten Randwertaufgaben. *Math. Nachr.*, Berlin **2**, 279—303 (1949).

L'A. dà un'ampia estensione della teoria relativa ai problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico già sviluppata in un precedente lavoro [*Math. Ann.* **118**, 773—770 (1942); questo *Zbl.* **27**, 401] in relazione al metodo dato da O. Perron per l'equazione $\Delta u = 0$ [*Math. Z.* **18**, 42—54 (1923)]. — Sia Ω_0 uno spazio metrico completo, perfetto e localmente compatto. Sia dato in Ω_0 un sistema \mathfrak{S} di sfere aperte κ che goda delle due proprietà seguenti: a) da $\kappa \in \mathfrak{S}$, $\kappa' \subset \kappa$ segue $\kappa' \in \mathfrak{S}$; b) per ogni punto $P \in \Omega_0$ esiste almeno una sfera $\kappa \in \mathfrak{S}$ avente il centro in P . Ad ogni sfera $\kappa \in \mathfrak{S}$ e ad ogni funzione continua f definita sulla frontiera di κ corrisponda una funzione continua $L_{f,\kappa}(P)$ definita in κ che verifichi i cinque postulati seguenti: I) per ogni punto R della frontiera di κ si abbia $\lim_{P \rightarrow R} L_{f,\kappa}(P) = f(R)$; II) in ogni sfera $\kappa^* \subset \kappa$ la funzione $u(P) = L_{f,\kappa}(P)$ verifichi

l'equazione funzionale (1) $u(P) = L_{u,\kappa^*}(P)$; III) si abbia

$$L_{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \kappa} = \lambda_1 L_{f_1, \kappa} + \lambda_2 L_{f_2, \kappa};$$

IV) da $\max f(P) = m > 0$ segue $L_{f,\kappa}(P) \leq m$, col segno = solo se f è costante; V) se f varia in un insieme di funzioni continue ed equilibrate, la corrispondente $L_{f,\kappa}(P)$ varii in un insieme di funzioni equicontinue in ogni punto di κ . Si dirà poi che una funzione u è regolare nel punto P se essa è continua in un intorno di P e verifica ivi l'equazione funzionale (1). — In queste condizioni, viene posto il seguente problema di valori al contorno. È dato in Ω_0 un insieme aperto e limitato Ω e sulla frontiera di Ω è definita una funzione limitata $f(R)$; si vuol costruire in Ω una funzione $u(P)$ la quale: a) sia regolare in ogni punto di Ω ; b) verifichi la condizione al contorno $f(R) \leq \underline{u(R)} \leq \overline{u(R)} \leq \bar{f}(R)$. — Per la risoluzione completa di questo problema occorre aggiungere un postulato VI che, in sostanza, stabilisce l'esistenza di una soluzione fondamentale di (1) in ogni sfera chiusa

\bar{z} di \mathfrak{C} . — Viene stabilito il concetto di barriera e sono studiate le condizioni per la regolarità di un punto della frontiera di Ω . — L'ultima parte del lavoro é dedicata al caso particolare in cui Ω_0 é uno spazio euclideo; si estendono i concetti di funzione di Green, di capacità ed il criterio di regolarità di Wiener.

Glizzetti (Roma).

Uspenskij, V. A.: Geometrische Ableitung der Grundeigenschaften der harmonischen Funktionen. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 2 (30), 201—205 (1949) [Russisch].

In dieser klar und leicht lesbar geschriebenen Arbeit werden die wesentlichen Eigenschaften (z. B. Maximumprinzip) einer harmonischen Funktion $f(z)$ aus dem Poissonschen Mittelwert auf einem Kreise C , $M_C(f)$, hergeleitet, wobei neben der Linearität von M_C und der Positivität [$M_C(f) \geq 0$, wenn $f \geq 0$] noch eine Invarianz gegenüber Bewegung [$M_C(f) = M_{C_1}(f_1)$ für zwei kongruente Kreise C , C_1 und $f(z) = f_1(z_1)$ für kongruente z , z_1 auf C , C_1] benützt wird. Die harmonische Winkel-funktion $H_{AB}(z) = \angle A z B$ ist hauptsächlich methodisches Hilfsmittel. Hoheisel.

Bonsall, F. F.: On generalized subharmonic functions. Proc. Cambridge phil. Soc. 46, 387—395 (1950).

The au. replaces the harmonic functions by the solutions of a general partial differential equation of the elliptic type, $L(w) = 0$, in the usual definition of subharmonic functions and imposing certain restrictions on $L(w)$ generalizes the elementary properties of subharmonic functions to this new class. Applications to complex analytic functions are given.

Horváth (Paris).

Miranda, Carlo: Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili. Giorn. Mat. Battaglini 78, 97—118 (1948).

Sia T un dominio limitato del piano xy , la cui frontiera FT sia costituita da $n + 1$ ($n \geq 0$) curve semplici e chiuse $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, a due a due prive di punti comuni e ciascuna dotata di tangente e curvatura variabili con continuità. Sia $u(x, y)$ una funzione biarmonica continua in T assieme alle sue derivate prime e su FT risulti

$$(1) \quad u = f(s), \quad (2) \quad \frac{du}{dv} = g(s),$$

ove s é l'arco su FT , v la normale interna e le funzioni $f(s)$, $f'(s)$, $g(s)$ sono continue. In tali ipotesi, l'A. dimostra che valgono per la u e per le sue derivate prime le seguenti formule di maggiorazione

$$(3) \quad \begin{cases} |u| \leq K_1 \delta [\max |g| + \max |f'|] + (1 + K_2 \delta) \max |f|, \\ \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \leq K_1 [\max |g| + \max |f'|] + K_2 \max |f|, \end{cases}$$

ove K_1, K_2 sono due costanti dipendenti soltanto dal dominio T e δ é la distanza del punto (x, y) da FT . Basandosi sulle (3) e su considerazioni di analisi funzionale, l'A. dà una nuova dimostrazione del teorema di esistenza e di unicità della funzione u biarmonica in T e verificante su FT le condizioni (1), (2). Viene dato infine anche un teorema di approssimazione della u mediante combinazioni lineari di funzioni biarmoniche particolari (polinomi nel caso $n = 0$). Glizzetti (Roma).

Variationsrechnung:

Giuliano, Landolino: La variazione prima nei problemi di Lagrange. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 6, 135—144 (1947).

Siano $G(x, y, x', y', u_1, \dots, u_m)$, $F_i(x, y, x', y', u_1, \dots, u_m)$, ($i = 1, 2, \dots, m$) funzioni finite e continue insieme con le loro derivate parziali dei primi due ordini in ogni punto (x, y) del campo A , per ogni coppia x', y' di numeri non ambedue nulli e per ogni m -pla appartenente a un campo U , e si supponga che tali funzioni siano positivamente omogenee di grado 1 rispetto a x', y' . — Si chiama curva ordinaria ogni curva continua e rettificabile $C: x = x(s), y = y(s)$ ($0 \leq s \leq L$),

appartenente al campo A e tale che il sistema differenziale

$$u_i(s) = \bar{u}_i + \int_0^s F_i(x, y, x', y', u_1, \dots, u_m) ds \quad (i = 1, \dots, m),$$

[ove $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ è un punto fissato del campo U], abbia in tutto $(0, L)$ una soluzione $u_1(s), \dots, u_m(s)$ costituita di funzioni assolutamente continue. Posto

$$J_C = \int_0^L G(x, y, x', y', u_1, \dots, u_m) ds,$$

sia $C_0: x = x_0(s), y = y_0(s)$ ($0 \leq s \leq L_0$) una curva ordinaria, e si consideri un'altra curva ordinaria $C: x = x(s) = x_0(s) + \delta x(s), y = y(s) = y_0(s) + \delta y(s)$ ($0 \leq s \leq L_0$), sufficientemente prossima a C_0 . — L'espressione

$$\delta J_C = \int_0^{L_0} \left\{ \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{\partial G}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial G}{\partial y'} \delta y' + \sum_{r=1}^m \frac{\partial G}{\partial u_r} \delta u_r \right\} ds$$

si chiama variazione prima dell'integrale J_C ; se δx e δy si annullano per $s = 0$ e per $s = L_0$, tale variazione si chiama smorzata. — Ciò premesso, l'A. dimostra il seguente teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché sopra una curva ordinaria del problema di Lagrange, la variazione prima smorzata di J_C sia identicamente nulla è che la curva ordinaria sia un'estremaloide. In fine l'A. perviene in modo molto rapido alle equazioni delle estremanti del problema di Lagrange considerato.

S. Cingini (Pavia).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

● Kantorovič, L. V., B. Z. Vulich und A. G. Pinsker: Funktionalanalysis in halbgeordneten Räumen. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1950. 548 S., 26,80 R.

Le but de ce livre est l'étude des espaces de Kantorovitch; ce sont des espaces vectoriels réels, munis d'une relation d'ordre $x \leq y$ telle que les axiomes suivants soient vérifiés: a) cette relation est compatible avec la structure vectorielle de l'espace donné X ; b) tout ensemble fini $E \subset X$ est borné supérieurement dans X ; c) toute partie E de X (finie ou non) qui est bornée supérieurement dans X possède une borne supérieure „exacte“ dans X . Dès les premières définitions apparaît donc le caractère restrictif de cette notion: il est en effet clair que, par exemple, l'espace des fonctions continues réelles sur un espace topologique vérifie a) et b); mais non c)! — L'ouvrage est divisé en 13 Chapitres; il est évidemment impossible de résumer ici le contenu de ce livre; disons seulement que les principales questions traitées sont les suivantes: a) règles de calcul sur les sup et les inf; décomposition d'un espace de Kantorovitch en somme directe de sous-espaces; relations avec la théorie des algèbres de Boole. — b) suites convergentes dans un espace de Kantorovitch; théorème de Freudenthal sur la „décomposition spectrale“

$x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \cdot de_{\lambda}^x$ de tout élément d'un tel espace; applications linéaires positives d'un tel espace

dans un autre, leurs propriétés de continuité, leur représentation intégrale à l'aide du théorème de Freudenthal; problèmes liés à l'extension des applications positives; convergence des suites de telles applications. — c) dual d'un espace de Kantorovitch [c'est l'espace des formes linéaires f qui vérifient la condition suivante: pour toute famille totalement ordonnée (x_{α}) d'éléments de l'espace, vérifiant $\inf_{\alpha} (x_{\alpha}) = 0$, on a $\lim_{\alpha} f(x_{\alpha}) = 0$], conditions pour que ce dual soit suffisam-

ment grand, cas des espaces normés. — d) réalisation concrète des algèbres de Boole, et des espaces de Kantorovitch, au moyen de familles d'ensembles, ou de fonctions continues sur des espaces compacts totalement discontinus, ou de fonctions sommables pour une mesure de Radon, etc. . . . — Comme on le sait, la théorie des espaces ordonnés a fait l'objet en 1940 d'un exposé de F. Riesz [Ann. Math., Princeton, II. S. 41, 174—206 (1940); ce Zbl. 22, 318]; le rapporteur estime que, si l'on met à part les résultats dont nous venons de parler en d) (et qui n'occupent, dans le livre en question, que les pages 499 à 532), ce mémoire contient l'essentiel de ce qu'il faut savoir sur ces espaces. Au lieu de cela, les AA. nous offrent des centaines de pages de raisonnements abstraits; un bon nombre d'entre eux sont immédiats, ou le seraient si l'on pouvait utiliser la réalisation concrète des espaces de Kantorovitch (réalisation qui n'est exposée qu'à titre de „supplément“ à l'ouvrage . . .); et finalement, on s'aperçoit que trois des principales applications de la

théorie sont passées sous silence, à savoir le théorème de Lebesgue-Nikodym, la décomposition spectrale des opérateurs hermitiens dans les espaces de Hilbert, et la théorie des fonctions de type positif sur les groupes abéliens. Il est sans doute superflu de dire que, dans ces conditions, la lecture de cet ouvrage donne une impression plutôt pénible, et risque fort de précipiter les lecteurs inexpérimentés dans une „hyperbourbakisation“ stérile; danger qui se confirme quand on constate que la plupart des applications exposées (problèmes des moments, opérations linéaires dans les espaces L^p , etc. . .) sont relatives à la droite, et présentent donc un degré d'abstraction comparativement négligeable, en sorte que le livre est, en principe, accessible à des lecteurs n'ayant qu'une très faible culture. Bien entendu, ce que nous disons là est hypothétique, et peut-être le „lecteur inexpérimenté“ aura-t-il une réaction totalement opposée à celle que nous prévoyons . . . Ce serait fâcheux; car en définitive la théorie des espaces ordonnés a quelque utilité; et il lui arrive parfois d'être belle — c'est ce dont on trouvera une démonstration magistrale dans le mémoire de F. Riesz dont nous avons parlé ci-dessus. *R. Godement (Nancy).*

● **Schwartz, L.: Théorie des distributions. Tome I.** (Actual. sci. industr., No. 1091.) (Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX.) Paris: Hermann & Cie. 1950. 148 p.

In diesem Buch baut der Verf. die von ihm in früheren Arbeiten ohne ausführliche Beweise dargestellte Theorie der Distributionen, die die Analysis auf eine neue Grundlage stellt, systematisch auf. [Die erste Veröffentlichung ist in Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., II. S. 21, 57—74 (1945) erschienen und in dem Referat über die spätere Arbeit (dies. Zbl. 30, 126) analysiert worden. Dieses Ref. wird im folgenden als „Ref.“ zitiert.] Auch in dem vorliegenden Buch mußten manche Beweise nur skizziert oder übergangen werden, um die Darstellung nicht zu umfangreich werden zu lassen. Es werden ziemlich weitgehende Kenntnisse aus der Topologie abstrakter Räume und der Funktionalanalysis vorausgesetzt, und häufig muß sogar von Sätzen aus diesen Gebieten Gebrauch gemacht werden, die in solchem Umfang noch nirgends explizit bewiesen sind. Das rührt daher, daß die meisten vorhandenen Untersuchungen sich auf Banachsche Räume beziehen, während die hier vorkommenden Räume nie zu dieser Kategorie gehören, sondern Fréchet'sche Räume (vollständige, lokal konvexe Vektorräume mit abzählbarer Basis von Umgebungen) oder noch kompliziertere Räume sind. Verf. kündigt aber eine gemeinsam mit Dieudonné verfaßte Arbeit an, in der diese Räume systematisch untersucht und die benutzten Sätze bewiesen werden sollen. Wegen der großen Reichhaltigkeit des Stoffes und der Schwierigkeit der Deduktionen können von dem vorliegenden Buch, das den I. Band des Gesamtwerkes darstellt und in 5 Kapitel gegliedert ist, nur die äußeren Umrisse skizziert werden. Für das 1. Kapitel, das die auf dem Vektorraum (D) der unbeschränkt oft differenzierbaren Funktionen $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ von n reellen Variablen mit kompaktem „Träger“ definierten Distributionen (lineare stetige Funktionale) $T(\varphi)$ einführt, sowie für das 2. Kapitel über die Ableitung einer Distribution kann auf „Ref.“ verwiesen werden. Von den vielen jetzt hinzugefügten Beispielen sei die in der gewöhnlichen Analysis eine etwas abseitige Stellung einnehmende „Partie finie“ eines divergenten Integrals (Hadamard) erwähnt, die in der Theorie der Distributionen eine ganz naturgemäße Einordnung findet, sowie die Deutung der Greenschen Formel als Aussage über den Laplaceschen Operator im Rahmen der Distributionen. Das 2. Kapitel enthält auch eine Theorie des unbestimmten Integrals einer Distribution, wobei sich Sätze ergeben wie: Wenn eine Distribution eine Funktion zur Ableitung hat, so ist sie selbst eine absolut stetige Funktion („Funktion“ natürlich in dem Sinne „durch die Funktion definierte Distribution“ verstanden, siehe „Ref.“). Das 3. Kapitel befaßt sich mit topologischen Räumen von Distributionen und der Struktur der Distributionen. War im 1. Kapitel in (D) durch Definition eines Grenzbegriffs eine Pseudotopologie eingeführt worden, so wird diese nunmehr durch Definition eines Umgebungsbegriffs durch eine wirkliche Topologie ersetzt. Nach Einführung des Begriffs der beschränkten Menge in (D) wird auch im Raum (D') der Distributionen eine Topologie definiert: Distributionen $T_j \in (D')$ konvergieren gegen 0 in (D'), wenn die Zahlen $T_j(\varphi)$ gegen 0 konvergieren für jedes $\varphi \in (D)$, und zwar gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge B von Funktionen $\varphi \in (D)$. Nachdem man über $\lim T$ verfügt, läßt sich die früher eingeführte Ableitung $\partial T / \partial x_k$ einer Distribution auch topologisch definieren:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \lim_{h_k \rightarrow 0} \frac{T(\varphi(x - h_k)) - T(\varphi)}{h_k}.$$

Die Ableitung erweist sich als lineare stetige Operation: Wenn die Distributionen T_j gegen 0 streben, so konvergieren auch die Ableitungen gegen 0. Also kann z. B. ohne weiteres jede konvergente Reihe gliedweise und jedes Integral unter dem Integralzeichen differenziert werden. Hierin spricht sich außer in der Existenz der Ableitung für jede summierbare Funktion (siehe „Ref.“) eine der wichtigsten Eigenschaften der neuen Theorie aus. Umgekehrt ist im Kleinen (d. h. in jeder offenen Menge des R^n mit kompakter Hülle) jede Distribution eine Ableitung einer stetigen Funktion (d. h. einer durch eine solche definierten Distribution). Im Großen gilt das im allgemeinen nicht, jedoch läßt sich jede Distribution auf unendlich viele Weisen als unendliche Summe von Ableitungen von stetigen Funktionen darstellen. — Im 4. und 5. Kapitel werden zwei Arten von Produkten von Distributionen definiert, das „direkte“ und das „multiplikative“.

S_x und T_y seien zwei Distributionen auf den Vektorräumen X^m und Y^n mit den Dimensionen m und n . Es seien $(D_x), (D_y), (D)_{x,y}$ die Funktionenräume (D) hinsichtlich $X^m, Y^n, X^m \times Y^n$. Dann ist das direkte Produkt $W_{x,y} = S_x \times T_y [\varphi(x, y)]$ gleich $S_x [T_y(\varphi(x, y))] = T_y [S_x(\varphi(x, y))]$. Ist speziell $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$ mit $u \in (D_x), v \in (D_y)$, so ist $W_{x,y} = S_x(u)T_y(v)$. Dieses Produkt wird später bei der Theorie der Komposition eine Rolle spielen. — Das multiplikative Produkt kann nicht allgemein für zwei Distributionen, sondern nur für eine Distribution als einen und eine unbeschränkt oft differenzierbare Funktion α als anderen Faktor definiert werden, und zwar durch $\alpha T \cdot \varphi = T \cdot \alpha \varphi$ [im 5. Kapitel wird $T \cdot \varphi$ statt $T(\varphi)$ geschrieben, um bei mehreren Buchstaben besser auseinander halten zu können, welches die Distribution und welches die Funktion ist, auf die sie ausgeübt wird]. Ist T eine Funktion f , so ist αT das übliche Produkt αf , denn dann ist nach der Definition

$$\alpha T \cdot \varphi = T \cdot \alpha \varphi = f \cdot \alpha \varphi = \int \cdots \int f(\alpha \varphi) dx.$$

Dies ist aber gleich $\int \cdots \int (\alpha f) \varphi dx = \alpha f \cdot \varphi$, also im Sinne der Distributionen die Funktion αf . Von größter Wichtigkeit für die Theorie der Integralgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen ist das Problem der Umkehrung der durch das multiplikative Produkt definierten Operation, die Division. Es handle sich um den linearen Raum $R^n = R^1$. Ist S eine gegebene Distribution und $H(x)$ eine Funktion, so gibt es in jeder offenen Menge, in der H keine Nullstelle hat, eine eindeutige Distribution T mit der Eigenschaft $HT = S$, d. h. $T = S/H$. Ein Problem liegt also nur vor, wenn H Nullstellen hat. Zuerst wird die Division durch Potenzen behandelt. Als Beispiel sei die Division durch x erwähnt: Es gibt unendlich viele Distributionen T mit $xT = S$, je zwei unterscheiden sich nur um ein Multiplum der Diracschen Verteilung δ . Von hier aus gelangt man zur Division durch eine beliebige Funktion H , die auf der reellen Achse nur isolierte Nullstellen endlicher Ordnung hat, indem man das Problem zunächst in der Nähe jeder einzelnen Nullstelle löst. — Von dieser Theorie werden wichtige Anwendungen auf Differentialgleichungen gemacht. Eine lineare partielle Differentialgleichung der Ordnung m mit einer Distribution T als Unbekannten ist von der Form $DT = B$, wo der Differentialausdruck D die Gestalt hat: $DT = \sum_{|p| \leq m} A_p(x) D^p T$ ($p = \{p_1, \dots, p_n\}$, $|p| = p_1 + \cdots + p_n$) und die A_p unbeschränkt oft differenzierbare Funktionen im gewöhnlichen Sinn sind. B ist eine gegebene Distribution. Der Überführung von T in DT in (D') entspricht im Raume (D) die Überführung von φ in $D'\varphi$: $DT \cdot \varphi = T \cdot D'\varphi$. Explizit ist $D'\varphi = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} D^p [A_p(x) \varphi(x)]$. Die Differentialgleichung verlangt also für jedes $\varphi \in (D)$:

$T \cdot D'\varphi - B \cdot \varphi = 0$. Sind T und B Funktionen, so kommen in diesen Gleichungen die gewöhnlichen Ableitungen von T nicht vor, so daß eine stetige, im gewöhnlichen Sinn nicht differenzierbare Funktion Lösung sein kann. Die Gleichung $DT = 0$ ist das, was in der klassischen Theorie adjungierte Gleichung heißt. Für gewöhnliche Differentialgleichungen (Dimension des Variablenraumes gleich 1) ergibt sich: Ist die Gleichung regulär, d. h. kann sie nach der Ableitung höchster Ordnung aufgelöst werden, so hat sie für jedes B unendlich viele Lösungen, die aus einer speziellen durch Addition der üblichen Lösung der homogenen Gleichung, die eine unbeschränkt oft differenzierbare Funktion (also keine allgemeine Distribution) ist, hervorgehen. Hier ergibt sich also gegenüber der klassischen Theorie nichts Neues. Bei partiellen Differentialgleichungen liegen die Verhältnisse ganz anders. Hier bilden zunächst einmal die Distributionslösungen eine lineare abgeschlossene Mannigfaltigkeit in (D') . In der gewöhnlichen Theorie ist das nur im elliptischen Fall richtig (jede gleichmäßige Grenze von harmonischen Funktionen ist harmonisch). Streben im hyperbolischen Fall die Lösungen (Funktionen im gewöhnlichen Sinn) gegen eine Grenzfunktion, so braucht diese nicht differenzierbar zu sein, so daß sie keine Lösung darstellt. — Nach kurzer Behandlung des Cauchyschen Problems wendet sich der Verf. den sogenannten Elementarlösungen zu, die in der klassischen Theorie als Lösungen der homogenen Gleichung mit einer Singularität von gewissem Typ in einem Punkt eine etwas vage Rolle spielen. Der Verf. definiert als Elementarlösung bezüglich des Differentialoperators D und des Punktes a jede Distribution $e_{(a)}$ mit der Eigenschaft $De_{(a)} - \delta_{(a)} =$ Diracsche Verteilung mit der Masse 1 in a , und behandelt die Beziehung dieses Begriffs zu dem von anderen Autoren eingeführten. — Zur allgemeinen Charakterisierung der Lösungen übergehend, zeigt der Verf., daß im Gegensatz zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen eine homogene partielle Differentialgleichung im Bereich der Distributionen andere als die gewöhnlichen Lösungen hat, die u. a. die in der klassischen Theorie nicht sauber zu bewältigenden nichtdifferenzierbaren Lösungen zu legitimieren gestatten. Nur im Fall der (in einem gewissen Sinn) elliptischen Gleichungen ist jede Lösungsdistribution auch eine Funktion im gewöhnlichen Sinn. Es wird eine große Anzahl von Gleichungstypen angegeben, die unter diese Kategorie fallen. Das Kapitel schließt mit einer Anwendung auf die direkten Methoden der Variationsrechnung, die die Kraft der neuen Theorie aufs beste demonstriert.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Stone, M. H.: Algebraic formulation of the problem of measure. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 69—74 (1950).

X désigne un espace abstrait non vide, R une relation portant sur les triplets ordonnés de points de X . Une fonction μ définie sur X et prenant ses vecteurs dans un groupe abélien additif est dite R -additive si $R(x, y, z)$ implique $\mu(x) = \mu(y) + \mu(z)$. Une fonction R -additive à valeurs réelles non négatives sera brièvement appelée R -mesure. L'article est consacré à la construction (idéale) de R -mesures d'où est dérivé un critère d'existence. L désigne l'espace des fonctions f à valeurs rationnelles réelles définies sur X telles que l'ensemble $(x; f(x) \neq 0)$ soit fini; f_x représente l'élément de L tel que $f_x(x) = 1$, $f_x(y) = 0$ pour $y \neq x$, H l'application $x \mapsto f_x$. L étant envisagé comme un espace vectoriel à multiplicateurs réels et rationnels, les fonctions $f_x - f_y - f_z$ correspondant à tous les triplets x, y, z vérifiant $R(x, y, z)$ engendrent un sous-espace linéaire L_0 . L'identification mod L_0 des éléments de L définit un espace L_X , l'application canonique de L sur L_X est notée G . La transformation $T = GH$ applique X dans L_X et est R -additive. Théorème de décomposition: Si M est un espace vectoriel à multiplicateurs réels et rationnels, A une application R -additive de X dans M , il existe une application rationnellement linéaire S de L_X dans M telle que $A = ST$. Le problème de la recherche et de l'existence d'une R -mesure non triviale revient donc à la construction d'une fonction à valeurs réelles λ définie et additive sur $V = L_X$, ≥ 0 sur $V_0 = T(X)$ et prenant sur un élément v_0 de V_0 une valeur positive. Définition: Un point v_0 de V est dit intérieur à l'ensemble U de V si toute droite passant par v_0 contient un segment auquel v_0 soit (relativement) intérieur. Théorèmes d'existence: I. Une condition nécessaire et suffisante de l'existence de λ est que $-v_0$ soit intérieur à un ensemble convexe K disjoint du plus petit cône convexe (de sommet 0) $C(V_0)$ incluant V_0 . II. Une condition suffisante est que $C(V_0)$ contienne v_0 comme point intérieur mais ne contienne pas $-v_0$. III. Supposant l'existence d'un élément x_0 de X tel que $T(x_0)$ soit intérieur à $C(V_0)$, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une R -mesure positive en x_0 est que pour tout sous-ensemble fini Y de X contenant x_0 il existe une R -mesure R_Y positive en x_0 . Dans les cas concrets la difficulté d'application de III réside dans la détermination des positions de $T(x_0)$ et $T(x)$ vis-à-vis de L_X .
Chr. Pauc (Le Cap).

Fomin, S. V.: Über Maße, die bezüglich einer gewissen Transformationsgruppe invariant sind. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 14, 261—274 (1950) [Russisch].

Soit S un groupe d'automorphismes d'un espace compact R ; soit G le groupe multiplicatif des fonctions complexes φ définies et continues sur R et telles que $|\varphi(x)| = 1$ pour tout $x \in R$. On peut considérer S comme un groupe d'automorphismes de G : si $s \in S$ et $\varphi \in G$, on note $s \cdot \varphi$ la fonction $\varphi(sx)$. Maintenant considérons le groupe P , „produit croisé“ de G par S ; comme on le sait, c'est l'ensemble des couples $[\varphi, s]$, ensemble muni de la loi de composition suivante:

$$[\varphi_1, s_1] \cdot [\varphi_2, s_2] = [\varphi_1 \cdot s_1 \varphi_2, s_1 s_2].$$

Cela posé, soit μ une mesure positive sur R et associons, à tout élément $[\varphi, s]$ de P , l'opérateur qui transforme une fonction $f(x)$ en la fonction $\varphi(x)f(sx)$; alors on obtient une représentation unitaire de P dans l'espace L^2 construit sur μ . (L'A. attribue cette remarque à Gelfand.) De plus, l'irréductibilité de cette représentation équivaut au fait que S est métriquement transitif pour μ . — L'A. montre ensuite que, si S est l'extension d'un groupe abélien par un groupe compact, il existe toujours sur R des mesures invariantes non nulles — l'A. utilise pour cela, le cas particulier des groupes à un générateur (Kryloff-Bogoliouboff) et suppose R séparable, ce qui est superflu. — Enfin, soit M l'ensemble des mesures invariantes par S , telles que $\mu(R) = 1$; c'est un ensemble convexe et faiblement compact, dont les points extrémaux sont les mesures „indécomposables“ en un sens évident; deux mesures extrémales disjointes sont du reste singulières l'une par rapport à l'autre; et toute mesure invariante est située dans l'enveloppe convexe faiblement

fermée de l'ensemble des mesures invariantes extrémales (Krejn-Mil'man). — Enfin, l'A. démontre que, si \mathfrak{M} est l'ensemble de toutes les mesures de masse totale 1 sur R , les points extrémaux de \mathfrak{M} sont en correspondance biunivoque et bicontinue avec ceux de R ; résultat pour le moins connu. — Puisque le but de l'A. était apparemment de généraliser quelques résultats de Kryloff et Bogoliouboff, il est regrettable que le théorème suivant soit totalement absent: toute mesure μ invariante par S est de la forme $\mu = \int_{\mathfrak{M}} m \cdot d\nu(m)$, où ν désigne une mesure positive de masse

totale 1 sur l'espace compact \mathfrak{M} , mesure dont toute la masse est concentrée sur l'ensemble des points extrémaux de \mathfrak{M} . R. Godement (Nancy).

Cotlar, M. und R. A. Ricabarra: Über einen Satz von E. Hopf. Rev. Un. mat. Argentina 14, 49—63 (1949) [Spanisch].

Soient E un ensemble, G un groupe de permutations de E , \mathfrak{T} une tribu de sous-ensembles de E telle que $E \in \mathfrak{T}$ et invariante par G , m une mesure complètement additive définie sur \mathfrak{T} , telle que $m(E) = 1$ et que l'ensemble des sous-ensembles de mesure nulle soit invariant par G . G est dit équicontinu (pour m) si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $m(A) < \delta$ entraîne $m(s(A)) < \varepsilon$ pour tout $s \in G$. Une mesure complètement additive μ définie sur G et telle que $\mu(G) = 1$ est dite m -invariante si elle est invariante (par G) et s'annule sur les mêmes sous-ensembles que m . Supposons G „mesurable“ [c'est à dire qu'il existe une mesure additive ν définie sur $\mathfrak{P}(G)$, telle que $\nu(G) = 1$ et invariante à droite]. Alors, pour qu'il existe une mesure μ m -invariante, il faut et il suffit que G soit équicontinu (pour m) [la mesure cherchée est définie par $\mu(A) = \int_G m(s(A)) d\nu_s$]; cette condition

est équivalente à la suivante (généralisation d'un résultat de E. Hopf pour G cyclique): E n'est équivalente par décomposition infinie à aucun $A \in \mathfrak{T}$ tel que $m(A) < 1$ [$A \in \mathfrak{T}$ est dit équivalent à $B \in \mathfrak{T}$ par décomposition infinie s'il existe une partition dénombrable de A en ensembles de \mathfrak{T} de la forme $(s_n(A_n))$, où $s_n \in G$ et où (A_n) est une partition dénombrable de B en ensembles de \mathfrak{T}]. Si G n'est pas équicontinu, les A.A. définissent le „noyau singulier“ S de m : S est l'ensemble $\in \mathfrak{T}$, invariant par G à un sous-ensemble de mesure nulle près, de plus grande mesure possible et contenant une suite infinie (S_n) d'éléments de \mathfrak{T} équivalents à S par décomposition infinie et deux à deux sans point commun. L'étude de S , combinée avec un exemple de P. Halmos [avec $E = Z$, G étant le groupe des translations; cf. Trans. Amer. math. Soc. 34, 373—393 (1932)] conduit à des propriétés curieuses des entiers.

Barbašin, E. A.: Über die Homomorphismen dynamischer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 429—432 (1948) [Russisch]. J. Braconnier (Lyon).

Soit (R, G) un système dynamique, où R est un espace topologique et G un groupe topologique abélien opérant dans R ($(g \in G, x \in R) \rightarrow f(x, g) \in R$). Le point x est l -stable si l'adhérence $J(x)$ de la trajectoire $J(x)$ de x est compacte. L'application α de R dans le tore T est un homomorphisme de (R, G) si $\alpha(f(x, g)) = \alpha(x) + \alpha^*(g)$ où α^* est un caractère de G . Le sous-groupe H des homomorphismes α pour lesquels $\alpha^* = 0$, est fermé et ouvert dans le groupe L de tous les homomorphismes. (R, G) est indécomposable si H ne contient que les homomorphismes constants. Le groupe des caractères $\Delta = L/H$ de (R, G) sera dit assez grand, si pour $x_1 \neq x_2$ il existe $\alpha \in L$ tel que $\alpha(x_1) \neq \alpha(x_2)$. — L'A. démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que R soit un ensemble minimal de points l -stables presque-périodiques est que le système (R, G) soit indécomposable et que Δ soit assez grand. En particulier si Δ est assez grand tout point l -stable est presque périodique. — A cet effet l'A. utilise le dual (compact) A de Δ et montre que pour $x \in R$ il existe un „homomorphisme“ ψ de (R, G) dans (A, A_G) (où A_G est un sous-groupe remarquable de A) tel que $\psi(J(x)) = A$.

Reeb (Strasbourg).

Grabar, M.: Abbildung dynamischer Systeme in Lösungssysteme von Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61**, 433—436 (1948) [Russisch].

Soit R un espace compact à base dénombrable, sur lequel est défini un système dynamique R_t (dont l'espace des paramètres est la droite réelle) admettant éventuellement un point singulier. — L'A. démontre la possibilité de plonger R dans l'espace de Hilbert par une application Φ et de définir un champ de vecteurs U sur $\Phi(R)$ tel que les trajectoires de R_t soient appliquées sur des lignes intégrales de U .

Reeb (Strasbourg).

Berezanskij, Ju. M. und S. G. Krejn: Kontinuierliche Algebren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **72**, 5—8 (1950) [Russisch].

Les AA. définissent la notion d'algèbre continue d'une façon assez compliquée, mais qui équivaut à ce qui suit: on considère un espace compact Q , à chaque point q duquel est associé, dans $Q \times Q$, une mesure de Radon positive $d\gamma(x, y; q)$, fonction continue de q ; si f et g sont deux fonctions continues sur Q on peut donc définir la fonction — elle aussi continue — $f * g(a) = \int \int f(x) g(y) d\gamma(x, y; q)$; cela étant, on impose à γ des conditions assurant que la formule précédente définit, sur l'espace $C(Q)$ des fonctions continues sur Q , une structure d'algèbre associative et commutative (γ joue évidemment un rôle analogue à celui des „constantes de structure“). Une telle structure d'algèbre continue de base Q étant donnée, on dit qu'une mesure positive m sur Q est multiplicative si, pour $f, g \in C(Q)$, on a $\int f * g(q) \cdot dm(q) = \int f(x) dm(x) \cdot \int g(y) dm(y)$; les AA. prouvent, à l'aide d'un théorème général de M. Krejn sur les opérateurs conservant un cône dans un espace de Banach, qu'une telle mesure existe toujours, et que deux telles mesures sont équivalentes. Soit dq une mesure multiplicative; le produit $f * g$ peut alors être défini lorsque f et g sont sommables pour dq , d'où une structure d'algèbre normée complète dans l'espace L^1 relatif à dq ; aux idéaux maximaux de L^1 correspondent, comme dans le cas des algèbres de groupe, des „caractères“ définis par une propriété fonctionnelle (on notera toutefois que L^1 n'est pas nécessairement semi-simple). Les AA. donnent finalement trois exemples; le premier est l'algèbre d'un groupe commutatif compact; les deux autres sont relatifs à $Q = [-1, 1]$ et ont pour mérite de conduire aux polynômes de Legendre et de Tchebychev. [Il existe du reste bien d'autres exemples intéressants dont les AA. ne parlent pas (en particulier, les „fonctions sphériques“ dans les espaces de Riemann symétriques, étudiées récemment par I. Gelfand); mais ils sont relatifs à des espaces Q localement compacts.] Les AA. signalent aussi les relations existant entre leurs résultats et la théorie de B. Levitan.

R. Godement (Nancy).

Dunford, Nelson: Resolutions of the identity for commutative B^* -algebras of operators. Acta Sci. math., Szeged **12 B**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 51—56 (1950).

Soient \mathfrak{H} un espace de Hilbert arbitraire et \mathbf{A} une algèbre commutative d'opérateurs bornés de \mathfrak{H} , invariante par $T \rightarrow T^*$, contenant l'opérateur unité et fermée pour la topologie uniforme (topologie définie par la norme des opérateurs). D'après un résultat bien connu de Gelfand et Neumark [Mat. Sbornik, n. S. **12**, 197—213 (1943)], \mathbf{A} est isomorphe (pour toutes ses structures) à l'algèbre des fonctions continues définies sur un certain espace compact Z , espace dont les éléments correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux de \mathbf{A} ou, ce qui revient au même, aux homomorphismes $T \rightarrow \zeta(T)$ de \mathbf{A} sur le corps complexe; il résulte de là et d'une généralisation du théorème de F. Riesz sur la caractérisation des mesures comme formes linéaires continues que, pour tout couple x, y d'éléments de \mathfrak{H} , il existe sur Z une mesure et une seule $d\mu(\zeta; x, y)$ telle que l'on ait $(Tx, y) = \int \zeta(T) \cdot d\mu(\zeta; x, y)$ pour tout $T \in \mathbf{A}$; d'où, pour toute partie borélienne ω de Z , un opérateur de projection $E(\omega)$ défini par $(E(\omega)x, y) = \mu(\omega; x, y)$ pour $x, y \in \mathfrak{H}$; on obtient ainsi

une „mesure spectrale“ grace à laquelle on a une formule de décomposition spectrale généralisée pour A , à savoir $(Tx, y) = \int \zeta(T) \cdot d(E\zeta)x, y)$. — Remarques du rapporteur: a) si $f(\zeta)$ est une fonction borélienne bornée définie sur Z_1 on peut lui associer un opérateur borné T_f par la formule $(T_f x, y) = \int f(\zeta) d\mu(\zeta; x, y)$; il est facile de voir que l'application $f \rightarrow T_f$ est compatible avec toutes les opérations algébriques connues; si f est la fonction caractéristique d'un ensemble ω , T_f se réduit au projecteur spectral $E(\omega)$ (et c'est un projecteur parce que $f^2 = f = f$); b) il serait aussi utile de préciser que: pour qu'un opérateur permute aux $T \in A$, il faut et suffit qu'il permute aux projecteurs spectraux $E(\omega)$; c) enfin, pour montrer que le résultat général contient bien le résultat classique, on procède comme suit: si T est un opérateur normal, on prend pour A l'algèbre formée des polynômes en T et T^* et de leurs limites uniformes; A possède donc un générateur, et en associant à un $\zeta \in Z$ le nombre complexe $\zeta(T)$, on obtient un homéomorphisme de Z dans le plan complexe — de façon précise, Z s'identifie au spectre de T — en sorte qu'alors on retrouve bien la formule habituelle de décomposition spectrale; d) l'isomorphisme de A avec une algèbre de fonctions continues est dû, non à Gelfand et Neumark, mais à Stone [Proc. nat. Acad. Sci. USA 26, 280 (1940)]; e) les résultats de l'A. ont été trouvés indépendamment par le rapporteur, et exposés, avec des applications à la théorie des représentations unitaires, dans un article qui doit paraître en 1951 aux Ann. Math., Princeton. R. Godement (Nancy).

Straus, A. V.: Über die verallgemeinerten Resolventen eines symmetrischen Operators. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 241—244 (1950) [Russisch].

Soit A un opérateur symétrique défini dans un sous-espace partout dense d'un espace de Hilbert \mathfrak{H} ; soit \tilde{A} un prolongement selfadjoint de A dans un espace de Hilbert $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$; si P est l'opérateur de projection orthogonale de $\tilde{\mathfrak{H}}$ sur \mathfrak{H} , et si $\tilde{E}(t)$ est la famille spectrale de \tilde{A} , on dit, suivant M. A. Neumark, que $E(t) = P\tilde{E}(t)$ est une famille spectrale de A ; on peut associer à celle-ci la famille

d'opérateurs $R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(t)}{t - \lambda} \quad (\lambda \text{ non réel}),$ qui est appelée une résolvante de A . —

Le but de l'A. est de donner une expression analytique de toutes les résolventes possibles de A sans faire intervenir les prolongements selfadjoints de A , et sans faire d'hypothèses sur les variétés de défaut de A . Le résultat annoncé est le suivant. Soit \mathfrak{M}_λ la famille des variétés de défaut de A , et désignons par P_λ l'opérateur de projection orthogonale sur \mathfrak{M}_λ ; choisissons une fois pour toutes un nombre complexe non réel λ_0 , situé par exemple dans le demi-plan supérieur; soit $F(\lambda)$ une fonction définie et analytique dans ce demi-plan, dont les valeurs sont des applications linéaires de norme ≤ 1 de $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$ dans \mathfrak{M}_{λ_0} ; alors la résolvante la plus générale de A est donnée par la formule suivante:

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1} (E - P_\lambda) - (\lambda - \bar{\lambda})^{-1} P_{\bar{\lambda}} \\ + (\lambda - \bar{\lambda})^{-1} P_\lambda [(\lambda_0 - \lambda) E - (\lambda_0 - \lambda) F(\lambda)] \times \{P_\lambda [(\lambda_0 - \lambda) E - (\lambda_0 - \lambda) F(\lambda)]\}^{-1} \cdot P_{\bar{\lambda}}$$

lorsque λ est dans le demi-plan supérieur.

R. Godement (Nancy).

Grinbljum, M. M.: Das Operator-Integral im Banachschen Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 5—8 (1950) [Russisch].

Cette Note fait suite à une précédente publication sur le même sujet (ce Zbl. 35, 201). Soit $P(\Delta)$ une fonction spectrale dans un espace de Banach E , définie par une paire $\{P_\lambda, P^\lambda\}$; désignons par K l'ensemble des fonctions $f(\lambda)$ qui sont limites uniformes de fonctions „étagées“ (ie. constantes par intervalles). Pour toute $f \in K$, on peut alors définir l'opérateur $U(f) = \int f(\lambda) dP_\lambda$ [on définit $U(f)$ de façon

évidente lorsque f est étagée, puis on prolonge par continuité]. $U(f)$ est un opérateur borné, dont la norme est, à une constante près, majorée par $\sup |f(\lambda)|$; pour toute forme linéaire continue $F(x)$ sur E , on a $F(U(f)x) = \int f(\lambda) dF(P_\lambda x)$; $U(f)$ dépend linéairement et multiplicativement de f . L'A. étend ensuite son „calcul opérationnel“ au cas des fonctions f non bornées. *R. Godement (Nancy).*

Zitlanadze, E. S.: Certains problèmes de l'extrême relatif et de la théorie des valeurs caractéristiques. C. r. Acad. Sci. URSS, n. S. 56, 15—18 (1947).

In dieser und einer vorangehenden Note [C. r. Acad. Sci. URSS, n. S. 53, 307—309 (1946)] verallgemeinert Verf. die Lusternik-Schnirelmannsche Methode der Variationsrechnung auf den Hilbertschen Raum und erhält auf diesem Wege einen Beweis für die Existenz von Eigenwerten nichtlinearer Operatoren. $f(a)$, $\varphi_i(a)$ ($i = 1, \dots, n$) seien Funktionale im Banachschen B -Raum. N sei die Menge aller a mit $\varphi_1(a) = \dots = \varphi_n(a) = 0$. Von f und den φ_i wird vorausgesetzt, daß sie in einer Umgebung von N erste und zweite Fréchet'sche Differentiale besitzen. Ein Punkt $b \in N$ heißt ein kritischer Punkt von f auf N , wenn für alle h mit $d\varphi_i(b; h) = 0$ stets $df(b; h) = 0$ folgt. $[M]$ sei eine topologische (d. h. Homotopie-) Klasse von kompakten Teilmengen $M \subset N$ und $c = \inf_{M \in [M]} \sup_{a \in M} f(a)$. Ist dann M_0 Minimalmenge von $[M]$, d. h. $c = \sup_{a \in M_0} f(a)$, und $(f = c)$ die Menge

aller Punkte $a \in N$ mit $f(a) = c$, so enthält der Durchschnitt von M_0 mit $(f = c)$ wenigstens einen kritischen Punkt von f . Im Hilbertschen Raum können die Fréchet'schen Differentiale in der Form eines inneren Produktes $df(a, h) = (L_f a, h)$ geschrieben werden, wobei L_f ein durch f bestimmter Operator ist. Es werden nun die folgenden beiden Sätze bewiesen: (1) Ist f ein schwach stetiges Funktional, welches der Bedingung $f(a + h) - f(a) = df(a; h) + \omega(a + h)$ mit $|\omega(a, h)| \leq k \|h\|^2$ genügt, so ist L_f total stetig. (2) Ist f schwach stetig und L_f totalstetig, so besitzt L_f wenigstens einen Eigenwert $\lambda = (L_f a, a)$, und im Falle $\lambda \neq 0$ liegt a auf der Einheitssphäre $\|a\| = 1$. Aus (2) folgt ein Satz von Lichtenstein (Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin 1931, S. 141; dies. Zbl. 2, 28) über die Existenz von Eigenwerten gewisser nichtlinearer Integralgleichungen. *Rinow.*

Orlicz, W.: Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées. Studia math. 10, 60—89 (1948).

Dans l'espace $L^\infty(a, b)$ des fonctions mesurables et essentiellement bornées dans un intervalle (a, b) , l'A. dit qu'une suite (x_n) est (l) -convergente vers x_0 si cette suite est bornée pour la norme $\|x\|_\infty$, et converge vers x_0 pour la norme $\|x\|_1$. Il donne un certain nombre de critères pour qu'une application additive U de L^∞ dans un espace (F) ou un espace de Banach soit „continue“ au sens de cette convergence, c'est-à-dire que $U(x_n)$ tende vers $U(x_0)$ lorsque (x_n) est (l) -convergente vers x_0 ; ces conditions diffèrent suivant la nature de l'espace Y des valeurs de U . Il applique ensuite ces conditions au cas où on prend pour espace Y un des espaces fonctionnels classiques tels que (C) ou (L^p) . Dans une seconde partie, l'A. montre qu'une suite (U_n) d'applications additives „continues“ en son sens de L^∞ dans Y , qui converge simplement, a encore pour limite une application continue, et étend ce résultat lorsqu'on remplace la convergence simple par d'autres conditions moins restrictives, en supposant davantage sur l'espace Y . Enfin, il applique ces résultats aux formes bilinéaires sur $L^\infty \times L^\infty$, et prouve en particulier l'intéressant théorème suivant: si $K(t, s)$ est une fonction mesurable dans un carré, telle que les intégrales $\int_a^b \left(y(s) \int_a^b x(t) K(t, s) dt \right) ds$ et $\int_a^b \left(x(t) \int_a^b y(s) K(t, s) ds \right) dt$ existent

quelles que soient les fonctions mesurables et bornées x et y , alors ces deux intégrales sont égales. J. Dieudonné (Nancy).

James, Robert C.: Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 285—292 (1947).

Dans un espace de Banach E , l'A. dit que x est orthogonal à y si $\|x + ky\| \geq \|x\|$ pour tout nombre réel k . En général, cette relation n'est pas symétrique et si x est orthogonal à y et à z , il n'est pas nécessairement orthogonal à $y + z$. L'A. montre que, quels que soient $x \neq 0$ et y dans E , il existe un nombre a tel que x soit orthogonal à $y + ax$, et un nombre b tel que $y + bx$ soit orthogonal à x ; mais en général ces nombres ne sont pas déterminés de façon unique; l'unicité de a (pour tout couple d'éléments x, y) équivaut à l'existence d'une différentielle de la norme $\|x\|$ au sens de Gâteaux; l'unicité de b équivaut au fait que la sphère $\|x\| = 1$ ne contient aucun segment (convexité stricte). L'A. examine aussi les relations entre l'orthogonalité dans E et l'orthogonalité dans l'espace dual E' . Il obtient des conditions pour que E soit isométrique à un espace hilbertien (une note de bas de page annonce en particulier que la symétrie de la relation d'orthogonalité est suffisante, dès que E a au moins 3 dimensions). Enfin l'A. considère certains exemples de la notion d'orthogonalité, notamment dans les espaces L^p et l^p , ainsi que dans les sous-espaces de l'espace C . J. Dieudonné (Nancy).

Shimoda, Isae and Kiyosi Iseki: General analysis in abstract spaces. I. J. Osaka Inst. Sci. Technology **1**, 61—66 (1949).

Let R and R^* be two locally convex linear topological spaces. 1. A transformation $U_k(x)$ of R in R^* is called a homogeneous polynomial of degree k if $U_k(\alpha x) = \alpha^k U(x)$ for α real and $x \in R$. $U(x) = U_0(x) + \dots + U_m(x)$ is called a polynomial of order m . A continuous polynomial $U(x)$ carries every bounded set into a bounded set. $U(x)$ is called strongly bounded if it takes any neighbourhood of the origin of R into a bounded set. If $U(x)$ is strongly bounded then it is continuous. If R is a space of type F then a polynomial $U(x)$ is continuous if it carries a bounded set into a bounded set. — 2. Let R be of 2nd category and $U_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) be a sequence of linear operators of R in R^* . If $U_n(x_0)$ is bounded for all $x_0 \in R$, then for any open set $V^* \subset R^*$ there exists an open set $V \subset R$ such that $U_n(V) \subset V^*$ ($n = 1, 2, \dots$). If $U_n(x)$ converges to $U(x)$ for every point $x \in R$, then $U(x)$ is a linear operation. (Generalizations of Banach's theorems.) — 3. Let E_1, E_2, E_3 be complex Banach spaces. If the application $f(x_1, x_2)$ of $E_1 \times E_2$ into E_3 is analytic on the boundary of a bounded domain $\Delta \subset E_1 \times E_2$, then it is analytic in Δ (generalization of Hartog's theorem). Horváth (Paris).

Grothendieck, Alexandre: Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces (F). C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1561—1563 (1950).

L'A. donne sans démonstrations des résultats, trop nombreux pour être détaillés ici, sur les espaces vectoriels localement convexes métrisables complets. Par exemple, le bidual fort d'un tel espace est complet (pour la topologie forte). Plusieurs problèmes posés par J. Dieudonné et L. Schwartz (ce Zbl. **35**, 355) sont résolus. Dixmier (Paris).

Arrighi, Gino: Sulla equazione funzionale $2\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)$. Boll. Un. mat. Ital., III. S. **4**, 255—257 (1949).

Die im Titel genannte Funktionalgleichung besitzt nach E. Picard [außer der vom Verf. nicht erwähnten trivialen Lösung $\varphi(x) \equiv 0$] keine anderen stetigen Lösungen als $\varphi(x) = \cos \lambda x$ und $\varphi(x) = \cos i\lambda x$ mit beliebigem konstantem reellem λ . Verf. zeigt, daß die Forderung der Stetigkeit durch die geringere Forderung ersetzt werden kann, daß $\varphi(x)$ für ein einziges x von rechts (oder von links) her stetig ist, da daraus die Stetigkeit für alle x folgt. Krafft (Marburg).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

• Kolmogoroff, A.: Foundations of the theory of probability. — Translated by N. Morrison. New York: Chelsea Publishing Company 1950. 70 p.

Girault, Maurice: Sur la notion de facteur commun en analyse factorielle générale. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 499—500 (1948).

Sind a , b , c unabhängige Veränderliche im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so sind im allgemeinen die Veränderlichen $x = F(a; b)$, $y = G(a; b)$ abhängig. Es wird an Hand eines Beispiels gezeigt, daß bei passender Wahl der Funktionen F und G es trotz der gemeinsamen Veränderlichen a vorkommen kann, daß x und y unabhängig sind. Heinhold (München).

Borel, Émile: Sur une martingale mineure. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1181—1183 (1949).

Es wird folgendes Glücksspiel betrachtet: Bei der ersten Partie macht der Spieler den Einsatz a , nach jeder verlorenen Partie multipliziert er den Einsatz mit $1 + \alpha$, nach jeder gewonnenen mit $1 - \alpha$. Unter der Voraussetzung, daß das Spiel billig ist, also der Quotient aus der Anzahl der gewonnenen durch die Anzahl der verlorenen Partien bei unendlicher Wiederholung gegen 1 wandert, nähert sich der Gewinn des Spieles in der Grenze dem Betrag a/α . Heinhold (München).

Quenouille, M. H.: The evaluation of probabilities in a normal multivariate distribution, with special reference to the correlation ratio. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. **8**, 95—100 (1949).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit dafür zu ermitteln, daß eine Beobachtung innerhalb eines gegebenen Abstandes um einen willkürlich gegebenen Punkt bleibt, wenn bekannt ist, daß die Beobachtungen einer symmetrischen mehrdimensionalen Gaußverteilung gehorchen, zum Beispiel Schüsse auf eine Scheibe. Es gelingt ihm, die auftretenden mehrfachen Integrale mit Hilfe von Polarkoordinaten auf einfache Integrale zu reduzieren, bei denen im Integranden Besselsche Funktionen auftreten, und Rekursionsformeln für die numerische Auswertung herzuleiten. Paul Lorenz (Berlin).

Forsythe, George E.: On Nörlund summability of random variables to zero. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 302—313 (1947).

In einer früheren Arbeit [Duke math. J. **10**, 397—428 (1943)] behandelte Verf. Cesaro-Summationsmethoden $\{C_r\}$, $0 < r < \infty$ für Folgen $\{x_n\}$ von unabhängigen reellwertigen Wahrscheinlichkeiten x_n . In dieser Arbeit werden entsprechend Nörlund-Summationsmethoden auf Wahrscheinlichkeitsfolgen übertragen. Eine Folge $\{x_k\}$ reeller Zahlen x_k heißt „nach x' N_p -summierbar“, wenn bei gegebener Folge $p = \{p_k\}$ nicht negativer Zahlen p_k und mit $P_n = \sum_{k=0}^n p_k$ die transformierte

Folge y_n mit $y_n = P_n^{-1} \sum_{k=0}^n p_{n-k} x_k$ den Grenzwert x' besitzt. Die Methode N_p heißt „regulär“, wenn sie bei konvergenten Folgen denselben Grenzwert wie die Konvergenz liefert. — Sind A und B zwei Summationsmethoden, so besagt „ $A \subset B$ “, daß jede nach einem endlichen Wert A -summierbare Folge auch B -summierbar nach demselben Wert ist, die Negation hiervon ist $A \not\subset B$. Für $A \subset B$ und $B \subset A$ schreibt man $A = B$. — Eine Folge $\{x_k\}$ heißt „wahrscheinlich nach Null N_p -summierbar“, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ mit $n \rightarrow \infty$ die

$$\text{Wahrscheinlichkeit } \left\{ P_n^{-1} \sum_{k=0}^n p_{n-k} x_k \right\} > \varepsilon \rightarrow 0$$

geht. (Durch N_p dargestellt, entsprechend ist C_p zu verstehen.) — Verf. beweist für normale Familien symmetrischer Wahrscheinlichkeitsfolgen $\{x_k\}$ hinreichende

Bedingungen für das Bestehen der Beziehungen $N_p \subset N_q$ und $N_p \equiv N_q$. Weiterhin wird für reguläre N -Summationsmethoden aus $C_1 \subset N_q$ die Beziehung $C_1 \subset N_q$ abgeleitet, ferner, falls für alle n die Ungleichungen $p_n \leq p_{n+1}$ bzw. $q_n \geq q_{n+1}$ gelten, die Beziehungen $C_1 \equiv N_p$ bzw. $N_q \subset C_1$ gefolgert. Schließlich wird noch die Existenz einer regulären N_p -Methode nachgewiesen, welche für reelle Zahlenfolgen den Bedingungen $N_p \subset C_1$, $C_1 \not\subset N_p$ und, für die obigen Wahrscheinlichkeitsfolgen, $N_p \equiv C_1$ genügt.

Heinhold (München).

Camp, B. H.: Generalization to N dimensions of inequalities of the Tchebycheff type. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 19, 568—574 (1948).

Es sei $f(t_1, \dots, t_n)$ eine Verteilung und Q_λ die Punktmenge, für die $f > \lambda$. Wenn dann das Maß von Q_λ mit x_λ bezeichnet wird, dann ist die Umkehrfunktion von x_λ die Funktion $\lambda(x)$ (mit geeigneten Bestimmungen für Punkte, in denen sie eventuell nicht

eindeutig definiert ist). Der Ausdruck $\hat{\mu}_r = \int_0^\infty x^r \lambda(x) dx$ wird als das r -te Kontourmoment bezeichnet, und Verf. definiert $P_\delta = \int_{Q_\lambda} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n$, wobei Q_λ dadurch gegeben ist, daß $x = \delta \sqrt{\hat{\mu}_2}$. Der folgende Satz wird bewiesen:

$$1 - P_\delta \leq \frac{\hat{\mu}_{2r}}{(\hat{\mu}_2)^r} / \left[\frac{\delta(2r+1)}{2r} \right]^{2r}.$$

Für normale Verteilungen ist diese Ungleichung ungefähr ebenso genau wie die klassische Tchebycheffsche Formel für eine Unbekannte, und Verf. führt eine Verteilung an, für die das Gleichheitszeichen gilt. Der Spezialfall für $r = 1$, nämlich $1 - P_\delta \leq 4\delta^2/9$ ist etwas allgemeiner als die entsprechende Gauß-Meidellsche Ungleichung, da hier nicht angenommen wird, daß $f(t)$ unimodal ist. S Vajda.

Rényi, Alfréd: On the algebra of distributions. Publ. Math., Debrecen 1, 135—149 (1950).

Mit vielen interessanten Bemerkungen beweist Verf. sechs Sätze über die — wenn überhaupt mögliche — eindeutige Zerlegbarkeit I. einer Zufallsveränderlichen $\eta = \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n$ mit gegebener Verteilungsfunktion (Vf) $G(x)$ in unabhängige Zufallsveränderliche ξ_k mit einer und derselben Vf $F(x; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, II. von n Veränderlichen $\eta_j = \lambda_{j1} \xi_1 + \dots + \lambda_{jn} \xi_n$ mit den Vfen $G_j(x)$ in unabhängige Veränderliche ξ_k mit — möglicherweise verschiedenen — Vfen $F_k(x; (\lambda_{jk}))$. Ein Satz bezieht sich auf den Zusammenhang der charakteristischen Funktionen bzw. der Verteilungsparameter von G und F . Bei I. sei $A_s = \lambda_1^s + \dots + \lambda_n^s$ für natürliche s . Dann ergibt sich bei einem auf ein endliches Intervall beschränkten η für die Eindeutigkeit der Zerlegung die Bedingung $A_1 \neq 0$ als notwendig und hinreichend. Sind noch alle $A_s \neq 0$, so ist die s -te Kumulante von G die A_s -fache jener von F . Bei den übrigen zerlegbaren η können hier (neben $A_s \neq 0$ für alle s oder für $s = 1, \dots, p-1$) nur zwei hinreichende Bedingungen der Eindeutigkeit erwähnt werden: die Analytizität der charakteristischen Funktion von G in der reellen Nachbarschaft des Anfangspunktes oder ihr Nichtverschwinden auf der reellen Achse und die Existenz aller gewöhnlichen sowie der μ ersten absoluten Momente von G . Ist schließlich bei II. eine der charakteristischen Funktionen der G_j eine ganze Funktion von 2 nichtübertreffender Ordnung, dann ergibt sich für die Eindeutigkeit der Zerlegung die Bedingung $\det(\lambda_{jk}^1) \cdot \det(\lambda_{jk}^2) \neq 0$ als notwendig und hinreichend.

Szentmártony (Budapest).

Hanner, Olof: Deterministic and non-deterministic stationary random processes. Ark. Mat., Stockholm 1, Nr. 14, 161—177 (1950).

Den Wold-Kolmogoroffschen Ergebnissen über die Zerlegung von stationären Zufallsfolgen entsprechend werden hier über die Zerlegung von stationären stetigen Zufallsfunktionen mit der von Karhunen neulich ausgebauten Hilbertraum-Methode folgende Sätze bewiesen. 1. Jede stetige stationäre Zufallsfunktion $x(t)$

läßt sich als Summe $y(t) + z(t)$ zweier ebensolcher zerlegen. Hierbei ist einerseits der Erwartungswert $E[y(s)z(t)] = 0$ für jedes feste s und t , d. h. y, z sind unkorreliert oder m. a. W. die Vektoren y, z im Hilbertschen Raume $L_2(u)$ der Zufallsveränderlichen $\sum_{v=1}^n c_v u(t_v)$ und ihrer im Mittel genommenen Grenzwerte sind orthogonal. Andererseits ist die in $L_2(y)$ abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit $L_2(y; a) = \{y(t); t \leq a\} = L_2(y)$ gegenüber $\lim_{a \rightarrow -\infty} L_2(z; a) = 0$, d. h. $y(t)$ ist deterministisch der vollkommen undeterministischen Funktion $z(t)$ gegenüber.

2. Jede Funktion letzter Art läßt sich in der Gestalt $\int_{-\infty}^t g(v-t) dZ(v)$ darstellen. Hierbei ist $g(w) \in L^2(-\infty, 0)$, also g eine geeignete, in $(-\infty, 0)$ absolutwertquadratisch nach Lebesgue integrierbare Funktion, ferner

$$L_2\{g(v-t); t \leq 0\} = L^2(-\infty, 0)$$

und schließlich $Z(I_a^b) = Z(b) - Z(a)$ eine gegenüber Verschiebungen invariante Zufalls-Spektralfunktion. D. h. eine über jeder mit dem Maß $m(S)$ meßbaren Punktmenge S der reellen Achse definierte Zufallsveränderliche $Z(S) \in L_2(x)$ mit $Z(S_1 + S_2) = Z(S_1) + Z(S_2)$ für $m(S_1 S_2) = 0$ und $E\{Z(S_1)Z(S_2)\} = m(S_1 S_2)$.
Szentmártony (Budapest).

Chung, Kai Lai: Fluctuations of sums of independent random variables. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 697—706 (1950).

Es seien X_i unabhängige Zufallsveränderliche mit einer gemeinsamen treppenartigen Gitterverteilungsfunktion $F(x)$, welche Sprünge höchstens bei ganzzahligen Abszissen zeigt und den Mittelwert α , die Streuung σ sowie beschränkte absolute Momente β_k bis zur dritten Ordnung besitzt. Ein von Feller 1945 aufgeworfenes Problem lösend, zeigt nun eine auf Sätze von Weyl über die Verteilung der Zahlen mod 1 sowie auf Untersuchungen von Esseen über asymptotische Entwicklungen von Verteilungsfunktionen sich stützende Analyse das Folgende. Die Zahl T_n , mit welcher die Folge der n ersten, auf ihre Mittelwerte reduzierten Teilsummen $S_k - k\alpha$ der Veränderlichen einen reellen Wert c — im Sinne $S_k - k\alpha > c, S_{k+1} - (k+1)\alpha \leq c$ — von oben kreuzt, zeigt asymptotisch eine positiv normale Verteilung, d. h. es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(T_n \leq \gamma n^{1/2} x) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^x e^{-y^2/2} dy$$

mit $\gamma = [\beta_1 + 2F(0)]/2$. Bei nichtgitterartiger Verteilungsfunktion kann nach vorangehender Normierung derselbe Satz mit $\alpha = 0$ und $\sigma = 1$ bewiesen werden.

Szentmártony (Budapest).

Sapogov, N. A.: Über eine Eigenschaft des Gaußschen Verteilungsgesetzes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 461—462 (1950) [Russisch].

Ein bekannter Satz von H. Cramér [Math. Z. 41, 405—414 (1936); dies. Zbl. 14, 121] besagt folgendes: Hat die Summe $X = X_1 + X_2$ zweier unabhängiger Zufallsveränderlichen X_1, X_2 die Gaußsche Normalverteilung, so haben X_1 und X_2 ebenfalls die Gaußsche Normalverteilung. Verf. dehnt diesen Satz auf den Fall aus, daß die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Summe X nur angenähert gleich der Gaußschen ist. Es sei

$$|F(x) - \Phi(x)| < \varepsilon, \text{ wo } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

und wo $0 < \varepsilon < 1$. Ferner bedeute $F_1(x)$ die Verteilungsfunktion von X_1 , und man setze $N = \lceil \log 1/\varepsilon \rceil$, $a_1 = \int_{-N}^N x dF_1(x)$, $\sigma_1^2 = \int_{-N}^N x^2 dF_1(x) - a_1^2$. Dann ist

$$\left| F_1(x) - \Phi\left(\frac{x - a_1}{\sigma_1} \right) \right| < \frac{C}{\sigma_1^{3/2} (\log 1/\varepsilon)^{2/3}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

mit einem von N und a_1, σ_1 unabhängigen C . Analoges gilt natürlich auch für X_2 . — Im Beweis, der nur kurz angedeutet wird, werden die Zufallsveränderlichen X_1^*, X_2^* , definiert durch $X_i^* = X_i$, wenn $|X_i| \leq \sqrt{\log 1/\varepsilon}$, $X_i^* = 0$ sonst, herangezogen, und ihre charakteristischen Funktionen untersucht. *Béla Sz.-Nagy.*

Mises, R. v.: On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 18, 309—348 (1947).

n reelle zufällige Veränderliche x_1, x_2, \dots, x_n sind einer Verteilungsfunktion mit dem Element $dV_1(x_1) \cdot dV_2(x_2) \cdots dV_n(x_n)$ unterworfen. Gefragt ist nach der Verteilung einer beliebigen Funktion f von x_1, x_2, \dots, x_n , wobei in erster Linie die vom Verf. eingeführten „statistischen Funktionen“ interessieren, die nur von der Aufteilung $S_n(x)$ der n Größen x_1, x_2, \dots, x_n abhängen. Der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt bekanntlich aus, daß die Verteilung einer linearen statistischen Funktion

$$f = \int \psi(x) dS_n(x) = \frac{1}{n} [\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_n)]$$

unter sehr allgemeinen Bedingungen betr. $\psi(x)$ und $V_\nu(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Gaußsche Verteilung konvergiert. Verf. zeigte früher [Ann. Inst. Henri Poincaré 6, 185—212 (1936); dies. Zbl. 16, 312], daß die Beschränkung auf lineare statistische Funktionen unwesentlich ist, daß vielmehr auch die Verteilungen viel allgemeinerer statistischer Funktionen, wie z. B. die des Moments m -ter Ordnung $\int (x-a)^m dS_n(x)$ mit $a = \int x dS_n(x)$, des Lexisschen Quotienten, des Disparitätsmaßes von Gini, des Korrelationskoeffizienten, gegen die Normalverteilung streben. Andererseits sind auch statistische Funktionen bekannt, wie z. B. Pearsons χ^2 und die vom Verf. und von Cramér eingeführte Prüffunktion ω^2 , deren Grenzverteilungen von der Gaußschen verschieden sind. [Vgl. N. V. Smirnof, Mat. Sbornik, n. S. 2, 973—993 (1937) und C. r. Acad. Sci., Paris 202, 449 (1936); dies. Zbl. 18, 412.] — Um diese Tatbestände aufzuhellen, werden die f als Funktionen, die im Raum der Verteilungen $V(x)$ oder einem Unterraum davon definiert sind, betrachtet. Dann ist die Veränderliche f , deren Verteilung gesucht ist, der Wert von $f\{V(x)\}$ im „Punkt“ $S_n(x)$. Es wird nun gezeigt, daß die asymptotische Verteilung von $f\{S_n(x)\}$ wesentlich vom Verhalten von $f\{V(x)\}$ im Punkte

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{n} [V_1(x) + \cdots + V_n(x)]$$

abhängt. Unter Heranziehung der von Volterra eingeführten Begriffe der Ableitung und der Taylorentwicklung einer Funktionenfunktion (fonction de ligne) ist eine schärfere Aussage möglich: Der Typus des asymptotischen Verhaltens einer differenzierbaren statistischen Funktion $f\{S_n(x)\}$ hängt davon ab, welches das erste nicht verschwindende Glied in der Taylorentwicklung von $f\{V(x)\}$ im Punkte $\bar{V}(x)$ ist. Ist es das lineare Glied, so ist — unter gewissen Einschränkungen — die Grenzverteilung die Gaußsche; andernfalls ergeben sich höhere Typen asymptotischer Verteilungen. Wenn sowohl die Funktion $f\{V(x)\}$ als auch die Folge der Verteilungen $V_1(x), V_2(x), \dots$ unabhängig voneinander definiert sind, so kann nicht überdies noch vorausgesetzt werden, daß die Ableitung von f an der Stelle $\bar{V}_n(x)$ verschwindet. In diesem Sinne erscheint die Normalverteilung als allgemeiner Fall einer asymptotischen Verteilung. Im Fall des Typus m ($m = 1, 2, 3, \dots$) strebt die Verteilung von $(*) n^{m/2} [f\{S_n(x)\} - f\{\bar{V}_n(x)\}]$ gegen eine Verteilung mit beschränktem Mittelwert und beschränkter Streuung. Für jedes ungerade m ist die Verteilung symmetrisch zum Nullpunkt. Bei gegebenem f ist die Grenzverteilung im wesentlichen bestimmt, falls außer $V_n(x)$ noch eine Funktion von zwei Veränderlichen

$$U_n(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n [V_\nu(x) - V_\nu(x) V_\nu(y)], & x \leq y \\ \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n [V_\nu(y) - V_\nu(x) V_\nu(y)], & x \geq y \end{cases}$$

bekannt ist. — Bei den Beweisen spielen eine wichtige Rolle gewisse spezielle statistische Funktionen, die den homogenen Polynomen entsprechen und daher „quantics“ genannt werden. Quantiken erster, zweiter, ... Ordnung sind definiert durch $\int \psi(x) dT_n(x)$ bzw. $\iint \psi(x, y) dT_n(x) dT_n(y)$, wobei $T_n(x) = S_n(x) - V_n(x)$, also $n T_n(x)$ den Überschuß der beobachteten Werte $\leq x$ über ihre erwartungsmäßige Anzahl angibt. — Schließlich wird für $m = 2$ der vollständige Ausdruck für die charakteristische Funktion der asymptotischen Verteilung von $(*)$ entwickelt. Sie hat die Form $1/D(u, i)$, wo $D(\lambda)$ die Fredholmsche Determinante eines symmetrischen Kerns ist, der von der zweiten Ableitung von $f\{V(x)\}$ an der Stelle $V = \bar{V}_n$, von V_n und von U_n abhängig ist. — Falls die $V_\nu(x)$ unstetige Verteilungen sind, die nur an k bestimmten Stellen Sprünge haben, so ist D die Determinante einer quadratischen Form von k Veränderlichen. Dies ist bei der Pearsonschen Funktion χ^2 der Fall, während die Smirnofsche Verteilung von ω^2 dem allgemeinen Fall vom Typus 2 angehört. *Schulz (Aachen).*

Mark, A. M.: Some probability limit theorems. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 885—900 (1949).

Es seien X_1, X_2, \dots unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen, von denen jede den Mittelwert 0 und die Standardabweichung 1 besitzt und es sei

$$S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k,$$

dann gilt mit $N = [\alpha n]$, $0 < \alpha < 1$, wie Verf. nach einer Methode von Erdős und Kac [Bull. Amer. math. Soc. **52**, 292—302 (1946)] beweist,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \{ \min (S_{N+1}, S_{N+2}, \dots, S_n) > \beta n^2 \}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{u=\beta x^{-1/2}}^{\infty} e^{-u^2/2} du \int_0^{(u\alpha^{1/2}-\beta)(1-\alpha)^{-1/2}} e^{-t^2/2} dt.$$

In Verallgemeinerung eines Ergebnisses der oben genannten Arbeit werden zwei weitere Grenzwerte betrachtet, die als Lösungen gewisser singulärer Integralgleichungen nachgewiesen werden. *Heinhold (München).*

Koopman, B. O.: A generalization of Poisson's distribution for Markoff chains. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 202—207 (1950).

Bei der Folge $U_{11}, (U_{21}, U_{22}), \dots$ von wachsenden Teilfolgen teilfolgenweise unabhängiger Zufallsveränderlichen U_{nk} , welche 1 bzw. 0 mit den Wahrscheinlichkeiten p_{nk} bzw. $1 - p_{nk}$ annehmen, fand Verf. für

$$\text{Prob} (U_{n1} + \dots + U_{nn} = s) = P_n(s) \rightarrow e^{-m} m^s / s!$$

die Bedingungen 1) $p_{n1} + \dots + p_{nn} \rightarrow m \geq 0$, 2) $\max (p_{n1}, \dots, p_{nn}) \rightarrow 0$ als notwendig und hinreichend. In allgemeineren Fällen glaubt Verf. die Bedingung 2) zur folgenden abschwächen zu können: 2') $p_{n1} \rightarrow 0$ zieht 2) nach sich. Er beweist jedenfalls den folgenden Satz. Sind die U_{nk} Glieder von teilfolgenweise stationären Markoffschen Ketten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten a_n bzw. $b_n = \text{Prob} (U_{nk} = 1 \text{ bei } U_{n,k-1} = 1 \text{ bzw. } 0)$, so sichern die Bedingungen 1), 2') und somit $b_n \rightarrow 0$ neben $a_n \rightarrow a < 1$ und $p_{n1} \rightarrow p_1$ die Konvergenz

$$P_n(s) = [(1 - p_1) L_s(w) a^s + (p_1 - a) L_{s-1}(w) a^{s-1}] e^{-m(1-a) + p_1}$$

mit den Laguerreschen Polynomen L_k von $w = [-m(1-a) + p_1](1-a)/a$. — Ein bis zu der Wahrscheinlichkeiten erzeugenden Funktion vordringender Satz im nichtstationären Fall wird nur angekündigt. *Szentmártony (Budapest).*

Bartlett, M. S.: Some evolutionary stochastic processes. (Symposium on stochastic processes, held before the Research Section of the Royal Statistical Society, June 9th, 1949.) J. R. statist. Soc., London, Ser. B **11**, 211—229 (1949).

Expository paper, dealing with two types of non-stationary stochastic processes, viz. additive or „random walk“ processes (including a problem of insurance risk and one of industrial replacement), and non-additive processes (such as the „multiplicative process“ and applications to population growth and to epidemiology).

S. Vajda (Epsom, England).

Statistik:

• **Baranow, L. von:** Grundbegriffe moderner statistischer Methodik. II: Zeitliche und kausale Zusammenhänge. Stuttgart: S. Hirzel Verlag 1950. 111 S. u. 32 Abq., kart. DM 6.50.

The first part of this work has already been reviewed (this Zbl. **36**, 209). The present volume contains chapters on indices, on graduation and analysis of series (exhibiting various methods of trend analysis and O. Anderson's variate difference method), on Correlation theory (mentioning some out-of-date coefficients, which appear to be unnecessary in such an elementary treatise) and finally on „modern methods for the determination of dependence“ (restricted to an introduction into the chi-squared method). — The au. claims that the book will prove useful to students

of German universities and that it enables them to find their way through recent literature, particularly of the Anglo-Saxon countries, without much difficulty. The book contains apparently less misprints than did the first part, but reference to a straight line $z = ax + by$ in the paragraph on multiple correlation should be replaced by its three-dimensional equivalent. *S. Vajda* (Epsom, England).

Skellam, J. G.: The distribution of the moment statistics of samples drawn without replacement from a finite population. *J. R. statist. Soc., London, Ser. B* 11, 291—296 (1949).

Einer endlichen N -gliedrigen Population x_1, \dots, x_N mit Mittelwert 0 werde eine n -gliedrige, zufällige Stichprobe ohne Zurücklegen entnommen. Die Momente des Kollektivs seien $M_a/N = \sum_{j=1}^N x_j^a/N$, die entsprechenden Momente der Stichprobe S_a/n . Verf. leitet für die Erwartungswerte von Produkten von ω Momenten der gleichen Stichprobe die allgemeine Formel

$$E\{S_a \cdot S_b \cdots S_m\} = \sum_P \lambda(P) \cdot \sum^{v(P)} M(P|\dots)$$

ab, aus der sich alle einfachen und Produkt-Momente der Simultanverteilung der Stichprobenmomente verschiedener Ordnung als Funktionen der Kollektivmomente M_a usw. ergeben. Die Summe ist zu erstrecken über alle $P(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_r^{\pi_r})$, d. h. alle additiven ganzzahligen Zerlegungen $p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + \cdots + p_r \pi_r = \omega$; die Größe $M(P|\dots)$ bedeutet das Produkt von den r Produkten, gebildet aus jeweils π_i Momenten der Form $M_{a_1+\dots+a_{p_i}}; \lambda(P)$ ist der Koeffizient von θ^n in der Entwicklung von $(1 + \theta)^N \psi_{p_1}^{\pi_1} \cdots \psi_{p_r}^{\pi_r} / \binom{N}{n}$ mit $\psi_p(\theta) = \left(\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\right)^p \ln(1 + \theta)$. Der Beweis fußt auf der aus der Moment-Erzeugenden

$$\exp\{t_1 \cdot S_a + t_2 \cdot S_b + \cdots + t_\omega \cdot S_m\} = \sum_{j=1}^n \exp\{t_1 x_j^a + \cdots + t_\omega x_j^m\}$$

gebildeten Funktion

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \dots, t_\omega) &= \prod_{j=1}^N \{1 + \theta \cdot \exp(t_1 x_j^a + \cdots + t_\omega x_j^m)\} \\ &= \exp \sum_{j=1}^N \sum_{p=0}^{\infty} \{t_1 x_j^a + \cdots + t_\omega x_j^m\}^p \psi_p(\theta)/p!. \end{aligned}$$

Die Resultate bestätigen die von P. V. Sukhatme [*Philos. Trans. R. Soc. London A* 237, 375—409 (1938); dies. Zbl. 19, 175] mit beträchtlich anspruchsvolleren Hilfsmitteln gewonnenen Formeln. *M. P. Geppert* (Bad-Nauheim).

Madow, W. G.: On the limiting distributions of estimates based on samples from finite universes. *Ann. math. Statist., Baltimore Md.* 19, 535—545 (1948).

Bekanntlich ist die Grenzverteilung des arithmetischen Mittels von Stichproben aus unendlichen Gesamtheiten unter sehr allgemeinen Bedingungen normal. In dieser Arbeit wird das arithmetische Mittel von Stichproben aus endlichen Gesamtheiten (ohne Zurücklegen) betrachtet. Verf. beweist den folgenden Satz: Es sei U_N ($N = 1, 2, \dots$) die Gesamtheit der Elemente x_{vN} ($v = 1, 2, \dots, N$) und $\bar{x}_N = \sum_v x_{vN}/N$; $\mu_{rN} = \sum_v (x_{vN} - \bar{x}_N)^r/N$. Ferner sei C_n ($n = 1, 2, \dots$) eine Menge von Koeffizienten c_{jn} ($j = 1, 2, \dots, n$) und $\bar{c}_n = \sum_j c_{jn}/n$; $\sum_j c_{jn}^2 = 1$; $\mu'_{rn} = \sum_j c_{jn}^r/n$.

Die Elemente der aus U_N entnommenen Stichprobe seien x'_{1N}, \dots, x'_{nN} . — Wenn nun vorausgesetzt wird, daß, für genügend große n und N , $\mu_{rN} = \mu_{2N}^{r/2} \lambda_r(N)$, $\mu'_{rn} = n^{-r/2} \lambda'_r(n)$ und $n^2 \bar{c}_n^2/N < 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), wobei eine endliche Größe λ existiert, welche für alle r eine obere Schranke für $|\lambda_r(N)|$ und für $|\lambda'_r(n)|$ ist, dann ist der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n c_{in} x'_{iN} - n \bar{x}_N \bar{c}_n\right|/\sigma_{\sum c_{in} x'_{iN}} < a\right\}$$

gleich

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx.$$

Der Beweis wird erbracht, indem gezeigt wird, daß die Grenzwerte der Momente des Bruches auf der linken Seite der obigen Gleichung mit den Momenten der Normalverteilung identisch sind. Die Grenzverteilung von $(\tilde{x} - \bar{x})/\sigma_{\tilde{x}}$ (worin \bar{x} das arithmetische Mittel der Gesamtheit und \tilde{x} dasjenige der Stichprobe ist) ist ein Spezialfall des allgemeinen Ausdruckes. Das hiermit zusammenhängende Korollar I. enthält Druckfehler, die ein volles Verständnis unmöglich machen. *S. Vajda.*

Pompilj, Giuseppe: Sulla media geometrica e sopra un indice di mutabilità calcolati mediante un campione. Mem. Soc. Ital. Sci., III. S. 26, 299—339 (1947).

Vorbereitend rekapituliert Verf. einige bekannte Eigenschaften der multinomialen Wahrscheinlichkeit $P = N! p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} / a_1! \cdots a_k!$ der Aufteilung $a_1 + \cdots + a_k = N$ einer N -gliedrigen Stichprobe mit Zurücklegen: Linearität der Regression eines a_i bezüglich der anderen a_j , Momente von $n_i = a_i - N p_i$ sowie Erwartungswerte beliebiger Produkte von Potenzen der n_i , n_j , usw. Aus diesen leitet Verf. sowohl durch sukzessive direkte Ausrechnung als auch durch Verwendung der Momente-Erzeugenden $F(\alpha)$ und der Erzeugenden $\ln F(\alpha)$ der Thiele'schen Halb-Invarianten die Momente der Verteilung der Stichproben-Momente

$$m_r^* = \sum_i x_i^r a_i / N = \sum_i x_i^r p_i + \sum_i x_i^r (a_i - N p_i) / N = \bar{m}_r + S_r$$

einer Variablen X , die die Werte x_1, \dots, x_k mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_k annimmt, ab. Aus der Tatsache, daß die Erwartungswerte von S_r^{2s-1} und S_r^{2s} mit wachsendem N wie N^{-s} gegen 0 streben, folgt, daß für $N \rightarrow \infty$ die Verteilung von m_r^* asymptotisch normal wird. Die allgemeinen Formeln werden angewandt zur Berechnung von Erwartungswert und Streuung der Schätzungen des geometrischen Mittels und des Ginischen Mutabilitätsindex aus Stichproben. Anwendung

der Resultate auf das geometrische Mittel $m_g = \prod_{i=1}^k x_i^{x_i}$ von X im Kollektiv und

dessen Stichprobenschätzung $\mathfrak{M}_g = \prod_{i=1}^k x_i^{a_i/N}$ ergibt den systematisch zu großen Erwartungswert

$$E(\mathfrak{M}_g) = m_g \cdot E(e^{S'_1}) \cong m_g \cdot \exp(\mu_z^2/2N),$$

wo $S'_1 = \ln \mathfrak{M}_g - \sum_{i=1}^k p_i \ln x_i$ und μ_z^2 die Varianz von $z = \ln x$ im Kollektiv ist,

und für $S_g = \mathfrak{M}_g - m_g$ Konvergenz von $E(S_g^{2s-1})$ und $E(S_g^{2s})$ für $N \rightarrow \infty$ gegen 0 wie N^{-s} ; für $N \rightarrow \infty$ geht die Verteilung von \mathfrak{M}_g asymptotisch in Normalverteilung mit Mittelwert m_g und Varianz $m_g^2 \cdot \mu_z^2/N$ über. Für den von Gini im Falle

qualitativer Merkmalsgliederungen definierten „Mutabilitätsindex“ $g_u = \sum_{i=1}^k p_i (1 - p_i)$

des Kollektivs und dessen erwartungstreue Schätzung aus der Stichprobe,

$g = \sum_{i=1}^k a_i (N - a_i) / N(N - 1)$, ergibt die Anwendung der allgemeinen Formeln

$E(g) = g_u$,

$$E(g - g_u)^2 = \mu_g^2 = 4 \cdot \left[g_u \cdot (1 - g_u) - \sum_i p_i^2 (1 - p_i) \right] / N + 2 \cdot \left[2 \sum_i p_i^2 (1 - p_i) - g_u \cdot (1 - g_u) \right] / N \cdot (N - 1).$$

Den Schlüssel zu der Bestimmung der Verteilung — oder wenigstens von deren ersten zwei Momenten — der Stichprobenschätzung eines Kollektivparameters erkennt Verf. in der Gleichsetzung der N -gliedrigen Stichprobe der eindimensionalen stocha-

stischen Variablen X mit einer Einzelprobe der k -dimensionalen multinomial verteilten Zufallsvariablen (a_1, \dots, a_k) . Einleitend betont Verf. die grundsätzliche Wichtigkeit der insbesondere von der italienischen Schule (Cantelli, Castelnovo, Gini) entwickelten Begriffe: stochastische Variable u. a. *M. P. Geppert.*

Gumbel, E. J. and R. D. Keeney: The geometric range for distributions of Cauchy's type. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 133—137 (1950).

Samples of size n are drawn from a population of „Cauchy type“, i. e. such that $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k [1 - F(x)] = A$ and $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x)^k F(x) = A$ where k and A are positive and $F(x)$ is the cumulative distribution. If, then, x_1 and x_n are the smallest and largest observations respectively, and if $q^2 = (-x_1)x_n$ is not negative, then q is called the geometric range. Using a theorem of Elfving the authors derive the cumulative distribution of q as $2u^k q^{-k} K_1(2u^k q^{-k})$ where u is defined by $F(u) = 1 - 1/n$ and K_1 is the modified Bessel function of order 1. They show how u and k can be estimated and remark on the analogy between the geometric range of Cauchy's type and the range of the exponential type of distributions. *S. Vajda* (Epsom, England).

Moran, P. A. P.: The distribution of the multiple correlation coefficient. Proc. Cambridge phil. Soc. **46**, 521—522 (1950).

Einer n -dimensionalen Normalverteilung der Variablen x_1, \dots, x_n mit dem multiplen Korrelationskoeffizienten R von x_1 bezüglich (x_2, \dots, x_n) werde eine N -gliedrige Stichprobe entnommen, in welcher die multiple Korrelation $R_{1(2\dots n)}$ von x_1 bezüglich (x_2, \dots, x_n) bekanntlich mit den partiellen Korrelationen durch die Relation

$$1 - R_{1(2\dots n)}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13.2}^2) \cdots (1 - r_{1n.2\dots(n-1)}^2) = (1 - r_{12}^2)(1 - S^2)$$

verknüpft ist. Aus der bekannten Verteilung der Stichprobenkorrelation r_{12} einer Binormalverteilung mit Kollektivkorrelation R ,

$$dr_{12} \cdot (N-2) \cdot (1-R^2)^{(N-1)/2} \cdot (1-r_{12}^2)^{(N-4)/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [\cosh z - R r_{12}]^{-(N-1)} dz / 2\pi,$$

und derjenigen von S als auf $N-1$ Beobachtungen fußender multipler Korrelation einer Variablen bezüglich $n-2$ anderer Variablen, von denen erstere nicht abhängt,

$$dS^2 \cdot S^{n-4} \cdot (1-S^2)^{(N-n-2)/2} \cdot \Gamma((N-2)/2) / \Gamma((n-2)/2) \cdot \Gamma((N-n)/2),$$

gewinnt Verf. wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit der Faktoren $(1 - r_{12}^2)$ und $(1 - S^2)$ die Verteilung von $R_{1(2\dots n)}^2$ in der bekannten Form:

$$dT^2 \cdot T^{n-3} \cdot (1-T^2)^{(N-n-2)/2} \int_0^\pi d\psi \int_{-\infty}^{\infty} \sin^{n-3} \psi \cdot [\cosh z - R T \cos \psi]^{-(N-1)} dz \cdot (1-R^2)^{(N-1)/2} \cdot \Gamma(N/2) / \pi \Gamma((n-2)/2) \Gamma((N-n)/2).$$

M. P. Geppert (Bad-Nauheim).

Anderson, R. L. and T. W. Anderson: Distribution of the circular serial correlation coefficient for residuals from a fitted Fourier series. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 59—81 (1950).

Es wird hauptsächlich folgende Frage behandelt. Wie und mit welcher Verlässlichkeit können die Beobachtungswerte $\{x_{ij}\}_{i=1}^{k2m}$ in bezug auf die Richtigkeit der Annahme $x_i - \mu_i = \varrho(x_{i-l} - \mu_{i-l}) + \mu_i$ mit unabhängigen, normal $(0, \sigma)$ verteilten Zufallsveränderlichen μ_i sowie

$$\mu_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\alpha_j \cos \frac{\pi j}{m} i + \beta_j \sin \frac{\pi j}{m} i \right) + \alpha_m \cos \pi i$$

geprüft und die Hilfsveränderlichen $\alpha_n, \beta_n, \varrho, \sigma$ geschätzt werden? Eine frühere allgemeinere — hier auf den vorliegenden Fall zugeschnittene — Untersuchung des zweitgenannten Verf. (dies. Zbl. **33**, 80) ergibt im streng zirkularen Fall

$x_{-j} = x_{2m-j}$, $\mu_{-j} = \mu_{2m-j}$ mit der Schätzung

$${}_1R = \frac{\sum_{i=1}^{k2m} (x_i - m_i)(x_{i-1} - m_{i-1})}{\sum_{i=1}^{k2m} (x_i - m_i)^2}$$

von ϱ das gleichmäßig kräftigste Verfahren zur Prüfung der Annahme $\varrho = 0$ gegenüber jener von $\varrho \neq 0$. Und zwar mit der, durch die Koeffizienten a_0 bzw.

$$a_m = \sum_{i=1}^{2m} (x_i \cos 2\pi i \text{ bzw. } \pi i) / (k2m), \text{ sonst } a_j \text{ bzw. } b_j = \sum_{i=1}^{2m} \left(x_i \cos \text{ bzw. } \sin \frac{\pi j}{m} i \right) / (km)$$

gewonnenen Schätzung m_i von μ_i sowie der Schätzung

$$s^2 = (1 - {}_1R^2) {}_1R \sum_{i=1}^{k2m} (x_i - m_i)^2 / (k2m)$$

von σ^2 . Die Verteilung von ${}_1R$ wird mit ihren genauen Momenten sowie deren Näherungswerten abgeleitet und die hieraus berechneten bedeutenden Werte ${}_1R'$ von ${}_1R$ in Tabellen mit doppeltem Eingang für die Bedeutungsstufen

$$\text{Prob}({}_1R > {}_1R') = 0,01; 0,05; 0,95; 0,99$$

und ausgiebig viele $k2m$ -Werte bei den gebräuchlichsten $2m$ -Werten zusammengestellt. *Szentmártony* (Budapest).

Milicer-Grużewska, H.: The coefficient of correlation a posteriori of equivalent variables. C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III 39, 5—17 u. poln. Zusammenfassg. 345 (1947).

Wenn x_i ($i = 1, 2, \dots$) Werte von unabhängigen Zufallsvariablen und $f_i(x_i)$ bekannte Funktionen sind, dann kann man nach dem Korrelationskoeffizienten $R^{(a)}\{f_i(x_i), f_k(x_k)\}$ fragen, der dadurch eingeführt wird, daß (*) $x_1 + \dots + x_n = a$ gesetzt wird. Khintchine [Mat. Sbornik, n. S. 12 (54), 185—195 (1943)] hat hierfür unter recht allgemeinen Voraussetzungen Formeln angegeben, die sich für den Fall, daß alle Veränderlichen derselben Verteilung genügen, und daß $f_i(x) = f(x)$ für alle i gilt, auf folgenden Ausdruck reduzieren: $R^{(a)} = O(1/n)$ und genauer $= -(1/n) R^2[f(x), x] + O(n^{-3/2})$, wobei $R[f(x), x]$ der Korrelationskoeffizient vor der Einführung der Beschränkung (*) ist. Verf. behandelt diesen Fall, jedoch mit der Abänderung, daß die Veränderlichen nicht mehr unabhängig sind, sondern daß für jedes Paar dieselbe gemeinsame Verteilungsfunktion gilt. Dann ergibt sich unter allgemeinen, genau angegebenen Bedingungen

$$R^{(a)}\{f(x_i), f(x_k)\} - R[f(x_i), f(x_k)] = O(1/\sqrt{n}),$$

und Verf. führt eine zweite, bis auf $O(n^{-3/2})$ genaue Formel an. (Das sehr „persönliche“ Englisch dieser Arbeit erschwert ihr Verständnis.) *S. Vajda* (Epsom, Engl.).

Aitken, A. C.: On the statistical independence of quadratic forms in normal variates. Biometrika, Cambridge 37, 93—96 (1950).

Verf. erweitert den von A. T. Craig [Ann. math. Statist. 14, 195—197 (1943)] gefundenen Satz: „Ist x ein Vektor, dessen Komponenten n unkorrelierte, normal mit der Streuung 1 verteilte Zufallsvariable sind, so ist für die statistische Unabhängigkeit der quadratischen Formen $x'Ax$ und $x'Bx$ notwendig und hinreichend, daß $AB = 0$ ist“, auf den Fall von korrelierten, einer Normalverteilung mit der Streuungsmatrix V folgenden Komponenten. Aus der sich hierbei ergebenden notwendigen und hinreichenden Bedingung für die statistische Unabhängigkeit der quadratischen Formen, $AVB = 0$, folgt als entsprechende Bedingung für die Unabhängigkeit einer Linearform $a'x$ und einer quadratischen Form $x'Bx$: $BVa = 0$. Die sich nach dem Satz von Craig ergebende Form der Bedingung für die Unabhängigkeit spezieller Bilinearformen wird ebenfalls angegeben. Für nicht-negative definite quadratische Formen unabhängiger, normal mit der Streuung 1 verteilter Variabler ist das mit der Bedingung von Craig äquivalente Kriterium von B. Matérn [Ann. math. Statist. 20, 119—120 (1949)], nach dem das Nullwerden aller Diagonalelemente von AVB notwendig und hinreichend ist, für die Anwendung bequemer.

Georg Friede (Göttingen).

Anderson, T. W.: The asymptotic distributions of the roots of certain determinantal equations. J. R. statist. Soc., London, Ser. B 10, 132—139 (1948).

Es seien X_{it} ($i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, N$) normal verteilt mit den Erwartungswerten $\sum_{\alpha=1}^m \varphi_{i\alpha} \xi_{\alpha t}$ und Kovarianzen σ_{ij} . Ferner sei $f_{i\alpha}$ der aus einer Stichprobe abgeleitete Wert von $\varphi_{i\alpha}$. Verf. macht Aussagen über das asymptotische Verhalten (d. h. für $N \rightarrow \infty$) der Wurzeln der Gleichung $\left| \sum_{\alpha, \beta=1}^q f_{i\alpha} f_{j\beta} n_{\alpha\beta} - \mu \sigma_{ij} \right| = 0$ ($q \leq m$), worin $n_{\alpha\beta}$ ein Ausdruck in den $\xi_{\alpha t}$, $\xi_{\beta t}$ ist. Insbesondere wird gezeigt, daß unter den für die Anwendung wesentlichen Voraussetzungen die Summe der r kleinsten Wurzeln wie χ^2 mit $r(q-p+r)$ Freiheitsgraden verteilt ist. Im zweiten Teil der Arbeit wird angenommen, daß der Erwartungswert von X_{it} gleich μ_{it} ist. Verf. macht Aussagen über das asymptotische Verhalten der Wurzeln von

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_{it} X_{jt} - \lambda \sigma_{ij} \right| = 0.$$

Die Beweise verwenden Methoden, die auf P. L. Hsu zurückgehen, und dienen der Rechtfertigung von Verfahren, die R. C. Geary und G. Tintner vorschlugen, um die Anzahl von linearen Beziehungen festzustellen, die zwischen beobachteten Regressionskoeffizienten und systematischen Teilen von Zufallsveränderlichen bestehen.

S. Vajda (Epsom, Engl.).

Geary, R. C.: Studies in relations between economic time series. J. R. statist. Soc., London, Ser. B. 10, 140—158 (1948).

Verf. zeigt, wie die in Hotellings Theorie der Hauptkomponenten auftretenden Größen auch zur Lösung des Problems verwendet werden können, das Tintner [Econometrica 14, 5 (1946)] behandelt, nämlich einen maximum likelihood Schätzwert für den systematischen Teil m_{it} der Veränderlichen x_{it} ($i = 1, \dots, p; t = 1, \dots, N$) zu finden, wenn angenommen wird, daß zwischen den ersteren r lineare Beziehungen der Form $\sum_{i=1}^p k_i m_{it} = 0$ für alle t bestehen. Es ergibt sich, daß die Schätzwerte

lineare Formen in den ersten $p-r$ Hauptkomponenten sind. Die Vor- und Nachteile dieser Werte im Vergleich mit den aus anderen Methoden gewonnenen werden besprochen, und Verf. schlägt eine neue Methode vor, die die Schätzwerte als lineare Kombinationen einer endlichen Anzahl von orthogonalen Funktionen einführt. Er zeigt auch, wie die Anzahl r der linearen Beziehungen durch Anwendung eines χ^2 -Tests auf die Summe der r kleinsten Eigenwerte einer geeignet gewählten Matrix abgeschätzt werden kann (vgl. T. W. Anderson, vorstehendes Referat). Schließlich leitet er für große Stichproben eine Formel ab für die Streuung der Verhältnisse der nach seiner Methode berechneten k_i . Die Resultate werden an Werten illustriert, die sich auf die amerikanische Wirtschaft beziehen. S. Vajda (Epsom, Engl.).

Geary, R. C.: Determination of linear relations between systematic parts of variables with errors of observation the variances of which are unknown. Econometrica, Chicago 17, 30—58 (1949).

Verf. betrachtet das folgende Modell: (1) Es werden Stichproben (x_{1t}, x_{2t}, x_{3t}) ($t = 1, 2, \dots, n$) beobachtet, deren Glieder normal mit bekannter Kovarianzmatrix $||\mu_{ij}||$ ($i, j = 1, 2, 3$) verteilt sind, wobei letztere von t unabhängig ist. (2) Die Stichproben sind für verschiedene t voneinander statistisch unabhängig. (3) $x_{it} = x'_{it} + x''_{it}$ für $i = 1, 2$. Beide Teile sind normal verteilt. (4) Es gilt $x'_{1t} = \alpha x'_{2t} + C$. α wird durch $\text{cov}(x_1 x_3) / \text{cov}(x_2 x_3)$ abgeschätzt, und Verf. bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieses Schätzwertes. Sie kann durch einfache Transformationen in die Studentische t -Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden übergeführt werden. Die Anwendbarkeit dieses Modells auf Zeitreihen wird untersucht, und Bemerkungen über den Fall mehrerer Variablen sowie ziffernmäßige Illustrationen sind ebenfalls in der Arbeit enthalten.

S. Vajda (Epsom, Engl.).

Banerjee, K. S.: Weighing designs and balanced incomplete blocks. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **19**, 394—399 (1948).

Hotelling [Ann. math. Statist. **15**, 297—306 (1944)] hatte im Anschluß an eine Bemerkung von Yates [Suppl. to J. R. statist. Soc., II. S. **98**, 211 (1935)] gezeigt, wie man die Gewichte b_i ($i = 1, \dots, p$) von p Gegenständen durch geeignete Kombination in $N \geq p$ Wägungen genauer bestimmen kann, als wenn bei jeder Wägung nur ein Gegenstand betrachtet würde. Es ist hierbei grundsätzlich zwischen den Fällen zu unterscheiden, in denen alle Gegenstände auf derselben Waagschale liegen müssen (d. h. nur Summen von Gewichten betrachtet werden: Federwaage) und denjenigen, in denen sie auf zwei Waagschalen verteilt werden dürfen (auch Differenzen von Gewichten sind beobachtbar: chemische Waage). Es wird angenommen, daß alle Wägungen Meßfehlern unterliegen, und es kann auch vorkommen, daß die Waage systematische Fehler enthält, die ebenfalls aus den Ergebnissen der Wägungen erschlossen werden müssen. — Hotellings Hauptresultat läßt sich wie folgt beschreiben: wenn $x_{\alpha i}$ ($\alpha = 1, \dots, N$; $i = 1, \dots, p$) gleich 0, +1 oder -1 gesetzt wird, je nachdem, ob in der α -ten Wägung der i -te Gegenstand gar nicht vorkommt, in der linken, oder in der rechten Waagschale liegt, und wenn wir die Bezeichnungen $\|X\| = \|x_{\alpha i}\|$, $\|X'X\| = \|a_{ij}\| = \|a^{ij}\|^{-1}$ einführen, dann ist der beste Schätzwert von b_i durch $\sum_j a^{ij} \sum_{\alpha} x_{\alpha i} y_{\alpha}$ gegeben (worin y_{α} das Resultat der α -ten Wägung darstellt). Die Streuungen dieser Schätzwerte sind $a^{ii} \sigma^2$, wenn σ^2 die Streuung einer einzelnen Wägung ist. Es gilt immer $a^{ii} \geq 1/N$, und man wird daher trachten, ein System zu finden, für das $\|X'X\|^{-1}$ eine Diagonalmatrix mit den Werten N^{-1} in der Diagonale ist. Solche Optimalsysteme gibt es aber nicht für alle N und p . — Mood [Ann. math. Statist. **17**, 432—446 (1946)] hat auf den bekannten Hadamardschen Satz hingewiesen, demzufolge der Wert einer N -gliedrigen Determinante, deren Elemente zwischen -1 und +1 liegen, nicht größer sein kann als $N^{N/2}$. Dieser Wert wird nur dann erreicht, wenn alle Elemente ± 1 sind und die Matrix $\|X\|$ orthogonal ist. Wenn, für ein gegebenes N , eine solche Matrix existiert, dann gibt sie offenbar das beste Wägungssystem für $N = p$. Mood hat auch Systeme für $N > p$ ausführlich untersucht. — In der gegenwärtigen Arbeit beschäftigt sich Verf. mit dem Falle der Federwaage und zeigt, daß man durch geeignete Interpretation der ausgeglichenen unvollständigen Blockpläne (balanced incomplete block design) Systeme finden kann, deren Genauigkeit (efficiency) in einem genau definierten Sinne leicht berechnet werden kann. Umgekehrt können Hadamardsche Matrizen dazu dienen, Blockpläne zu konstruieren. Verf. behandelt ferner den Fall, in dem nicht die Feststellung einzelner Gewichte mit größter Genauigkeit, sondern vielmehr diejenige von Linearkombinationen solcher Gewichte (etwa deren Gesamtsumme) verlangt wird. Dies wird insbesondere aktuell sein, wenn nicht alle Gegenstände gleichzeitig auf der Waagschale untergebracht werden können. *Vajda*.

Quenouille, M. H.: An application of least squares to family diet surveys. *Econometrica*, Chicago **18**, 27—44. (1950).

Methods are described for the analysis and planning of survey data, with the aim to reduce the considerable amount of work necessary when several sets of constants have to be estimated. *Cavalli* (Cambridge).

Nair, U. Sivaraman and Sundararama Sastry: Tests of statistical hypotheses. (Symposium on methods of testing hypotheses.) *Math. Student*, Madras **16**, 80—86 (1949).

Bateman, G. I.: The power of the χ^2 -index of dispersion test when Neyman's contagious distribution is the alternate hypothesis. *Biometrika*, Cambridge **37**, 59—63 (1950).

Einem der Neymanschen Ansteckungs-Verteilung mit Mittelwert $m_1 m_2$ und Varianz $m_1 m_2 (1 + m_2)$,

$$\Pr \{x = 0\} = \exp [-m_1 \cdot (1 - e^{-m_2})],$$

$$\Pr \{x = t + 1\} = m_1 m_2 \cdot e^{-m_2} \cdot \sum_{j=0}^t m_2^j \cdot \Pr \{x = t - j\} / j! (t + 1),$$

folgenden Kollektiv werde eine N -gliedrige Stichprobe x_1, \dots, x_N mit Mittelwert \bar{x} entnommen. Unter Verwendung von Fishers k -Parametern bestimmt Verf. die ersten vier Momente der Verteilung des im Falle der Poisson-Verteilung ($m_2 = 0$, $m_1 m_2 = m$) mit dem Dispersionsindex zusammenfallenden Parameters $z = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 / \bar{x}$, welche für $N \rightarrow \infty$ oder $m_1 m_2 \rightarrow \infty$ gegen die entsprechenden Momente der Verteilung von $(1 + m_2) \chi^2$ mit $N - 1$ Freiheitsgraden konvergieren. Die Tatsache,

daß z demnach asymptotisch wie $(1 + m_2) \chi^2$ mit $N - 1$ Freiheitsgraden verteilt ist, wird angewandt zur Prüfung der Hypothese $m_2 = 0$ bei festem $m_1 \cdot m_2 = m$, die bekanntlich den Spezialfall der Poisson-Verteilung darstellt, gegen die Hypothese irgendeiner anderen Neymanschen Verteilung. Aus der asymptotischen Darstellung der Verteilung von z ergibt sich auch die Leistungsfähigkeit (power-function) des genannten Kriteriums als Funktion des wahren $m_2 = M_2$ approximativ als

$$\Pr \{z \geq \chi^2_\alpha | m_2 = M_2\} = \Pr \{(1 + M_2) \chi^2 \geq \chi^2_\alpha\},$$

wo χ^2 $N - 1$ Freiheitsgrade hat und χ^2_α der dem Signifikanzgrad α entsprechende kritische χ^2 -Wert ist. Aus derselben gewinnt man Anhaltspunkte über den zur erfolgreichen Testung erforderlichen Umfang einer Stichprobe bei gegebenem Verhältnis Varianz/Mittelwert.

M. P. Geppert (Bad-Nauheim).

Lord, E.: Power of the modified t -test (u -test) based on range. *Biometrika*, Cambridge 37, 64—77 (1950).

Zum Vergleich eines empirischen Mittelwertes mit einer Konstanten bzw. zweier empirischer Mittelwerte miteinander hat Verf. (dies. Zbl. 30, 40) im Falle normal verteilter Variablen x an Stelle des Studentschen t -Tests die Benutzung des Quotienten $u = x \cdot d_n / \bar{w}(m, n)$ vorgeschlagen, wo $w(m, n)$ sich aus $m \cdot n$ voneinander unabhängigen Stichprobenwerten als Mittel der m Variationsbreiten von je n Probenwerten ergibt und d_n der Erwartungswert der Variationsbreite einer einem mit Mittelwert 0 und Streuung 1 normal verteilten Kollektiv entnommenen n -gliedrigen Stichprobe ist. Für t -Test (mit ν Freiheitsgraden) und u -Test (m, n) wird die Leistungsfunktion (power-function) $\beta(\rho)$ in Funktion des wahren Kollektivmittelwertes ρ und bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit α für Fehler 1. Art berechnet und mittels Lagrangescher Interpolation und numerischer Integration in Abhängigkeit von ν bzw. von n (für den Spezialfall $m = 1$) tabuliert. Außerdem berechnet und tabuliert Verf. für t - bzw. u -Test in Abhängigkeit von ν bzw. von n und m , und zwar für die beiden Signifikanzgrenzen $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,01$, den von J. Neyman und B. Tokarska [*J. Amer. statist. Assoc.* 31, 318—326 (1936); dies. Zbl. 14, 358] definierten „standardisierten“ Fehler ρ_α , für welchen $1 - \beta(\rho_\alpha) = \alpha$ gilt, d. h. die Wahrscheinlichkeiten für Fehler 1. und 2. Art gleich sind. Hieraus liest man u. a. ab, welche Gruppenaufteilung $m \cdot n$ des vorgegebenen Stichprobenumfanges N auf den leistungsfähigsten u -Test führt, und es zeigt sich, daß es eben diejenige ist, welche die effizienteste Schätzung der Standard-Abweichung σ liefert. u -Test und t -Test decken sich im Falle $m = 1$, $n = 2$, $\nu = 1$ und im Falle $m = 1$, $n \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$. Die Einbuße an Leistungsfähigkeit bei Benutzung des u -Tests an Stelle des gleichmäßig leistungsfähigsten, erwartungstreuen (uniformly most powerful unbiased) t -Tests wird durch die erheblich einfachere Berechnung vom u aufgewogen.

M. P. Geppert (Bad-Nauheim).

Patnaik, P. B.: The use of mean range as an estimator of variance in statistical tests. *Biometrika*, Cambridge 37, 78—87 (1950).

Die Arbeit knüpft (unter Beibehaltung der Bezeichnungen) an die vorstehend besprochene von Lord an. Während letzterer die Leistungsfähigkeit seines u -Kriteriums numerisch bestimmte, wird diese hier approximativ bestimmt auf Grund geeigneter Näherungsverteilungen. Aus dem von E. S. Pearson [*Biometrika*, London 18, 202 (1926)] gegebenen $\beta_1 \beta_2$ -Diagramm der Verteilung der Variationsbreite in n -gliedrigen Stichproben aus normal verteiltem Kollektiv folgert Verf., daß die Verteilung von $w(m, n)$ sich durch eine χ -Verteilung approximieren läßt. Identifizierung der ersten zwei Momente M , V von $\bar{w}(m, n)/\sigma$ und $c \cdot \chi/\sqrt{\nu}$ ergibt

$$1/\nu = -2 + 2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \{V/M^2 + [-2 + 2\sqrt{1 + 2V/M^2}]^3/16\}},$$

$$c = M \cdot \{1 + 1/4 \nu + 1/32 \nu^2 - 5/128 \nu^3\};$$

dann ist $w(m, n)/c \sigma$ näherungsweise verteilt wie $\chi/\sqrt{\nu}$, d. h. wie s/ν auf Grund von ν Freiheitsgraden. Hieraus folgt, daß $t = c u/d_n = c x/w(m, n)$ näherungsweise der Student-Verteilung mit ν Freiheitsgraden folgt, daß zum Vergleich des Stichprobenmittelwertes \bar{x} mit einer Konstanten μ mithin $v = c \sqrt{n m} (\bar{x} - \mu)/w(m, n)$, zum Vergleich zweier Stichprobenmittelwerte \bar{x}_1, \bar{x}_2

$$v = c \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/\bar{w}(m_1 + m_2, n) \cdot \sqrt{1/m_1 n + 1/m_2 n}$$

an Hand der Student-Verteilung mit ν Freiheitsgraden zu beurteilen ist. Ist W_N die Variationsbreite einer anderen, von ersterer unabhängigen Stichprobe, so folgt $g = c W_N/\bar{w}(m, n)$ näherungsweise der gleichen von E. S. Pearson und H. O. Hartley [Biometrika London 32, 301 (1942)] tabulierten Verteilung wie die „studentisierte“ Variationsbreite $q = W_N/s$. Diese Tatsache wendet Verf. auf die Fragestellung der Varianzanalyse an. Die Hypothese mangelnder Variabilität zwischen den m Gruppen wird geprüft an dem näherungsweise der besagten Verteilung folgenden Quotienten $q = W_m c \sqrt{n}/w(m, n)$, wo W_m = Variationsbreite der m Gruppenmittelwerte. Die entsprechende Approximation der Leistungsfähigkeit (power function) des u -Tests führt auf die „nicht-zentrale“ Student-Verteilung; Vergleich mit J. Neymans [J. R. statist. Soc. Suppl. 2, 131 (1935) Tabellen der Leistungsfähigkeit des t -Tests bestätigen die von Lord (vgl. vorsteh. Referat) erzielten Resultate. Für die Leistungsfähigkeit des q -Tests sind Tabellen der Verteilung der studentisierten Variationsbreite (E. S. Pearson und H. O. Hartley, op. cit.) heranzuziehen und die Resultate mit der Leistungsfähigkeit des F -Tests zu vergleichen.

M. P. Geppert (Bad-Nauheim).

Pearson, E. S.: Some notes on the use of range. Biometrika, Cambridge 37, 88—92 (1950).

In Ergänzung der vorstehend referierten Arbeiten von Lord und Patnaik untersucht Verf., wie weit Lords u -Test auch für Stichproben aus nicht normalen Kollektiven brauchbar bleibt. Zu dem Zweck berechnet er für einige zufällige Stichproben aus Kollektiven, die Pearson-Verteilungen vom Typ II bzw. VII (β_2 positiv), III bzw. I (β_1, β_2 positiv) folgen, mit Hilfe bekannter Formeln Erwartungswert und Streuung des Quotienten w_n/d_n . Die Abweichungen von den entsprechenden, im Falle von Normalverteilung gültigen Momenten erweisen sich als nicht erheblich. Auch die von K. J. Shone (dies. Zbl. 33, 196) angeführten Zahlenbeispiele werden herangezogen. Ferner untersucht Verf. die Auswirkung einer irrtümlichen Vergrößerung des größten Gliedes x_n einer n -gliedrigen Stichprobe durch eine additive Konstante $a > 0$ auf Variationsbreite w und Streuung s ; einfache Rechnung ergibt

$$E(w/d_n) = 1 + a/d_n, \quad E(s^2) = 1 + a^2/n + a d_n/(n-1),$$

und deren numerische Auswertung zeigt, daß ein derartiger Fehler die Variationsbreite stärker beeinträchtigt als die Streuung.

M. P. Geppert (Bad-Nauheim).

Cox D. R.: The use of the range in sequential analysis. J. R. statist. Soc., Ser. B 11, 101—114 (1949).

Verf. führt einen Folgetest für die Prüfung der Hypothese an, daß die Streuung einer normal verteilten Gesamtheit einen vorgegebenen Wert hat, und einen zweiten Test dafür, daß die Streuungen zweier normaler Verteilungen einander gleich sind. Beide Tests beruhen auf dem Wahrscheinlichkeitsverhältnis und sind bekannten Methoden nachgebildet, in denen nach jedem Schritt die Streuung der jeweils erhaltenen Stichprobe berechnet werden muß. Verf. ersetzt dies durch die Berechnung der Breite (range). Um die notwendigen Berechnungen zu erleichtern, wird die Verteilung der Breite durch eine Pearsonkurve angenähert. An einem Spezialfall wird gezeigt, daß die erforderliche Anzahl von Beobachtungen in einem solchen Folgetest kleiner sein kann, als in dem die Streuung benützenden klassischen Test gleicher Potenz (power).

S. Vajda (Epsom, Engl.).

Bhattacharyya, A.: Unbiased statistics with minimum variance. Proc. R. Soc. Edinburgh A 63, 69—77 (1950).

Using methods of the calculus of variations, the author shows that, if a function $t(x_1, \dots, x_n)$ of n stochastic variables, distributed according to $F(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_l)$ can be found such that $t = \lambda_0 + \sum_i \lambda_i \Phi_i / F$ (where the λ s are functions of the parameters θ and the Φ are functions derived from F by processes of the infinitesimal calculus), then t is an estimate with minimum variance of $\tau(\theta_1, \dots, \theta_l)$, subject to the restrictions $\int t F dx_1, \dots, dx_n = \tau$, $\int t \Phi_i dx_1, \dots, dx_n = \alpha_i(\theta_1, \dots, \theta_l)$, where the α_i are derived from τ in the same way as the Φ_i from F . The λ s can be found by solving the equations

$$\alpha_j = \int [\lambda_0 \Phi_j + \sum_i \lambda_i \Phi_i \Phi_j / F] dx_1, \dots, dx_n.$$

This is true under certain assumptions, such as the convergence of certain integrals and the solvability of certain linear equations. S. Vajda (Epsom, England).

● **Matérn, Bertil:** Methods of estimating the accuracy of line and sample plot surveys. Meddelanden Statens Skogsforsk. Inst. Stockholm 36, Nr. 1, 1—117 u. engl. Resumé 118—136 (1947) [Schwedisch].

Verf. studiert Forstabschätzungen, wenn man diese längs regelmäßig ausgelegter Linien ausführt. Er macht gewisse Wahrscheinlichkeitsvoraussetzungen über die topographische Variation und erhält so ein mathematisches Modell für das Versuchsverfahren. Ausgehend von dieser betrachtet er verschiedene Formeln zur Berechnung des mittleren Fehlers. Bergström (Göteborg).

Biometrie. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Pollard, A. H.: The measurement of reproductivity. J. Inst. Actuaries 74, 288—337 (1948).

Es wird zunächst ein Überblick über einfache Verfahren zur Berechnung der Ergänzung einer Bevölkerung aus den vom Staate erhobenen Unterlagen gegeben. Ausführlicher, weil in der Arbeit benötigt, werden erörtert: 1. Die „Nettoreproduktionsrate“ (Boeckh)

$$(1) \quad R_0 = \int_0^{\infty} (l_x/l_0) f(x) dx$$

[l_x = Zahl der Lebenden, $f(x)$ = Fruchtbarkeit im Alter x], die $>$, = oder $<$ 1 ist, je nachdem die Bevölkerung wächst, gleichbleibt oder abnimmt. 2. Das „wahre Maß des natürlichen Wachstums“ ρ , das der Integralgleichung $\int_0^{\infty} e^{-\rho x} (l_x/l_0) f(x) dx = 1$ genügt und angenähert berechnet

wird zu $\rho = (R_0 R_1 / (R_0 R_2 - R_1^2)) (R_0^{R_2 R_2 - R_1^2} / R_1^2 - 1)$ mit $R_n = \int_0^{\infty} x^n (l_x/l_0) f(x) dx$, wobei $f(x)$ durch eine Pearsonkurve vom Typ III ausgeglichen wird. ρ ist $>$, = oder $<$ 0, wenn $R_0 >$, = oder $<$ 1 ist. Dieses Maß macht den besten Gebrauch von den gegebenen Daten. 3. Das Maß von Karmel für den Nachwuchs:

$$(2) \quad K_0 = \int_0^{\infty} (l_x/l_0) m_y dy \sum_0^{\infty} b_r = \sum_0^{\infty} b_r \left(\int_0^{\infty} l_y m_y dy \right) / l_0,$$

das R_0 entspricht und bei dem m_y das Verhältnis der Zahl der Frauen vom Alter y , die in diesem Jahre heiraten, zur Gesamtzahl der Frauen dieses Alters und b_r das Verhältnis der jährlichen Geburten zu den jährlichen Heiraten, und zwar getrennt nach der Ehedauer r , ist. 4. Schließlich erfordert die „Clare-Dyne-Formel“ $C_0 = \int_0^{\infty} (l_y/l_0) m_y \sum_0^{\infty} b_r dy$, wo b_r eine Verfeinerung des b_r

zur Berücksichtigung des Heiratsalters y ist, zwar die meiste Rechnung und die meisten Daten, ist aber (1) und (2) überlegen. Beispiele, Statistisches Material von Queensland 1944 und Australien 1933 benutzend, werden ausführlich durchgeführt. Es wird weiter, namentlich an vielen Diagrammen, gezeigt, daß (unter der Voraussetzung konstanter Fruchtbarkeit) eine Beschleunigung oder Verzögerung der Eheschließungen (Anteil der verheirateten Frauen an der Gesamtzahl eines bestimmten Alters), z. B. unter dem Einfluß von Krieg oder wirtschaftlicher

Depression, zu einer Verschiedenheit von R_0 , C_0 und K_0 und damit zu Unklarheiten über das Bevölkerungswachstum führen. Verf. empfiehlt hier, die jährliche Geburtenzahl aufzuspalten nach dem Alter der Mutter zur Zeit der Eheschließung und der Ehedauer. — Die vom Verf. mit großem mathematischen Apparat entwickelten eigenen Formeln benützen folgende Daten: Die Wahrscheinlichkeit — unter Mitberücksichtigung der Sterblichkeit — zur Zeit der Geburt $\Phi(x) dx$ ($\xi(x) dx$), daß ein(e) Mann (Frau) ein weibliches (männliches) Kind haben wird im Alter zwischen x und $x + dx$ Jahren. Ausgehend vom Ansatz

$$F(t) = \int_0^{\infty} M(t-x) \Phi(x) dx, \quad M(t) = \int_0^{\infty} F(t-y) \xi(y) dy$$

und daraus folgend $B(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} B(t-x-y) \Phi(x) \xi(y) dx dy$, wo $F(t)$, $M(t)$, $B(t)$ die weiblichen bzw. männlichen bzw. sämtlichen Geburten zur Zeit t bedeuten, wird durch den Ansatz (3) $B(t) = \sum_n B_n e^{s_n \cdot t}$ aus der sich daraus ergebenden Gleichung

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \Phi(x) dx \int_0^{\infty} e^{-\sigma y} \xi(y) dy = 1$$

als (3) erfüllender s -Wert σ , „das verbundene Maß des natürlichen Wachstums“, gewonnen mit der Beziehung zu (4) $S_0 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi(x) \xi(y) dx dy$, daß $\sigma \geq 0$, je nachdem $S_0 \geq 1$ ist. Mit

$M_n^s = \int_0^{\infty} x^n \Phi(x) dx$ und $a = M_1/M_0$, $b = M_1^2/M_0^2 - M_2/M_0$ und den entsprechenden, durch $\xi(x)$ an Stelle von $\Phi(x)$ bedingten Größen N_n , α und β ergibt sich angenähert für σ

$$1/2 (b + \beta) \sigma^2 + (a + \alpha) \sigma - \log_e M_0 N_0 = 0.$$

Wird $\Phi(x)$ durch eine Pearson-Kurve vom Typ III ausgeglichen: $\Phi(x) = M_0 (t^u/\Gamma(u)) x^{u-1} e^{-tx}$, wo $t = M_0 M_1/(M_0 M_2 - M_1^2)$, $u = M_2^2/(M_0 M_2 - M_1^2)$, und das entsprechende für $\xi(x)$ getan mit v statt t und w statt u , so folgt $(M_0/(1 + \sigma/t)^u) \cdot (N_0/(1 + \sigma/v)^w) = 1$. Nach einer Determinantendarstellung für die Koeffizienten B_m aus (3) wird weiter angenommen, daß das Verhältnis von männlichen und weiblichen Geburten bis zur Zeit t konstant $= X$ ist. Dann ergeben sich als Alters- und Geschlechtsverteilungen $f(x) = l_x^{(f)} e^{-\sigma x}$ und $m(x) = X l_x^{(m)} e^{-\sigma x}$. Unter der gleichen Annahme sind q_m und q_f , die „wahren Maße des natürlichen Wachstums“, gegeben durch $\int_0^{\infty} e^{-q_m x} \Phi(x) X dx = 1$ und $\int_0^{\infty} e^{-q_f y} \xi(y) X^{-1} dy = 1$. Dann liegt σ zwischen q_m und q_f .

Zwischen S_0 (4), $R^m = \int_0^{\infty} \Phi(x) X dx$, $R_f^f = \int_0^{\infty} \xi(y) X^{-1} dy$ besteht unter denselben Annahmen die Beziehung $S_0 = R_0^m \cdot R_f^f$. Als Endresultat ergibt sich die einfache Näherungsformel $\sigma = (a q_m + \alpha q_f)/(a + \alpha)$. — Die Ergebnisse werden in ausführlicher Darstellung auf die Daten von Australien angewendet. Die Mithetrachtung des sonst nicht berücksichtigten männlichen Geschlechtes wird als notwendig erwiesen. Eine Diskussion über diese Arbeit ist zum Schluß abgedruckt.

Günther (Nordhausen).

Geppert, Maria-Pia: Biologische Gesetze im Lichte der Mathematik. Mitteil.-Bl. math. Statistik, München 1, 145—166 (1949).

A review of some important applications of mathematical statistics to biological problems in recent years. Examples discussed in the paper: (1) a theory by von Pfaunder to account for the variation of sex-ratio with age; (2) various a-priori approaches to the Weber-Fechner law (that biological response is proportional to the logarithm of the stimulus) and especially von Schelling's approach which assumes a model well worth being considered by physiologists and immunologists; (3) von Schelling's approach to the law of all-or-none response. Cavalli (Cambridge).

Geppert, Maria-Pia: Die χ^2 -Methode in der medizinischen Forschung. Mitteil.-Bl. math. Statistik, München 1, 90—95 (1949).

The number of degrees of freedom for chi square in an application to medical data by Hosemann [Dtsch. Med. Wschr. 74, 35—37 (1949)] was not correct. A correction and further comments are given here. Cavalli (Cambridge).

Geiringer, Hilda: Contribution to the heredity theory of multivalents. J. Math. Phys., Massachusetts 26, 246—278 (1948).

The frequency distributions of gametes and genotypes are well known for diploid inheritance; less so for polyploids. Here they are derived for 2s-ploids under the assumptions of random mating, chromosome segregation (chromatid segregation will be dealt with in another paper); both for two and more alleles. — Recurrence formulae are given for the distributions, equilibria and rates of approach to equilibrium are examined. *Cavalli (Cambridge).*

Nanda, D. N.: The standard errors of discriminant function coefficients in plant-breeding experiments. *J. R. statist. Soc., Ser. B* **11**, 283—290 (1949).

Formulae have been derived by Fairfield Smith to calculate the expected genetic advance in a selection experiment, by means of an application of the theory of discriminant functions. In the present paper standard errors have been calculated for the genetic advance as well as for the coefficients of the discriminant function which lies to the basis of it. *Cavalli (Cambridge).*

Greville, Thomas N. E.: Mortality tables analyzed by cause of death. *Record, Amer. Inst. Actuaries* **37**, 283—294 (1948).

Allgemeine Darstellung der Theorie der Sterbetafeln mit mehreren Ausgangsursachen. Absterbeordnung bei Wegschaffung einer Ausgangsursache, für die Gesamtbevölkerung sowie für diejenigen, die sonst wegen dieser Ursache sterben sollten. Berechnung solcher Sterbetafeln aus statistischen Erfahrungen. *Bruno de Finetti.*

Duffield, Dickinson C.: A short method of developing exposed to risk formules. *Record, Amer. Inst. Actuaries* **37**, 7—10 (1948).

Die Wahl der anpassenden Formel für die Gesamtheit der Lebenden wird erleichtert bei Erwägung folgender Regel: Das mittlere Alter der Gestorbenen soll um $\frac{1}{2}$ Jahr höher als die der Ein- und Ausgehenden sein. *Bruno de Finetti.*

Rich, C. D.: The rationale of the use of the geometric average as an investment index. *J. Inst. Actuaries* **74**, 338—339 (1948).

Der auf der Grundlage des geometrischen Mittels berechnete Index der Versicherungstatistiker $I_t = ((P_{1,t} \cdot P_{2,t} \cdots P_{n,t}) / (P_{1,0} \cdot P_{2,0} \cdots P_{n,0}))^{1/n}$, wo $P_{v,t}$ ($v = 1, \dots, n$) die Preise der n Wertpapiere bedeuten, ist nicht, wie allgemein angenommen, willkürlich gewählt und ohne praktische Bedeutung, sondern hat gegenüber dem sich ebenfalls anbietenden arithmetischen Mittel $A_t = n^{-1} (P_{1,t}/P_{1,0} + \cdots + P_{n,t}/P_{n,0})$ auf seiner inhaltlichen Interpretation und seinem formalen Aufbau beruhende Vorteile. — Werden für $t = 0$ in jedem der n Wertpapiere gleiche Beträge investiert, so ändert sich der Wert des Gesamtbestandes auf das A_t -fache (≤ 1), wenn in der Zwischenzeit die Papiere gehalten und keine Investitionen gemacht werden, jedoch auf das I_t -fache, wenn die Marktwerte der n Investitionen dadurch ständig einander gleich gehalten werden, daß bei jeder noch so kleinen Preisänderung stetig — das ist Voraussetzung — durch Käufe oder Verkäufe der Gewinn bzw. Verlust auf alle n Papiere gleichmäßig verteilt wird. — Bei ungleichen Investierungen läßt sich durch Verwendung des gewogenen geometrischen Mittels ein analoger Prozeß und Index aufstellen. — Gegenüber A_t weist I_t den Vorteil auf, daß das Verhältnis zweier Indizes für t bzw. t' nur von den Preisen zu diesen Zeiten, aber nicht zur Zeit 0, abhängt. — Wird der Betrag $1/n$ in jedem der n Papiere angelegt und der Wert jeder Teilinvestierung durch Kauf oder Verkauf auf $1/n$ gehalten, so ist der zur Zeit t erzielte Bargewinn oder -Verlust $= \ln I_t$. *Günther (Nordhausen).*

Finetti, Bruno de: L'esattezza nella contabilità aziendale. *Publ. Fac. Sci. Ing. Univ. Trieste, Ser. B, Nr. 27*, 25 p. (1948).

Die vorliegende Arbeit des bekannten Verf. behandelt in allgemeinverständlicher Darstellung und unter eingehender Berücksichtigung der Praxis einen durchaus aktuellen Gegenstand aus der angewandt-mathematischen Forschung, nämlich die Frage der Genauigkeit im betrieblichen Rechnungswesen. Es wird vor allem das interessante Problem der Einführung auf geometrischer Progression fußender, genommener Stufenfolgen in Werteskalen, wie Prämientarifen und dgl. in den Mittelpunkt der Betrachtungen gestellt, wobei besonders auch eine bemerkenswerte Anwendung im Bereiche der Exzedenten-Rückversicherung aufgezeigt wird. — Die notwendigen Entwicklungen sowie die zahlenmäßigen Übersichten und der Formelapparat zur statistischen Behandlung des aufgeworfenen Problems sind in einem Anhang zusammengefaßt. *G. Wünsche (München).*

Phipps, Cecil G.: A note on Tintner's „homogeneous systems“. *Econometrica, Chicago* **18**, 63 (1950).

Die Bedingungen von Theorem 3 in G. Tintner, *Homogeneous systems in mathematical economics* (dies. Zbl. 33, 295) sind zwar ausreichend, nicht aber hinreichend, wie Verf. an einem einfachen Beispiel zeigt. Die Ausführungen Tintners in Abschnitt 12 seiner Arbeit sind entsprechend zu berichtigen. *Härten* (München).

Chauchard, Paul: *Une science nouvelle, la cybernétique*. Rev. sci., Paris 87, 242—244 (1949).

Geometrie.

Topologie:

• Alexandroff (Aleksandrov), P. S.: **Kombinatorische Topologie**. Moskau, Leningrad: OGIZ, Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1947. 660 S. 31, 70 R. [Russisch].

Dieses schöne Lehrbuch gibt eine außerordentlich lebendige, anschauliche und zugleich strenge Darstellung eines großen Teiles derjenigen Gebiete der Topologie, die von Homologiemethoden beherrscht werden. Es vermeidet den handbuchartigen Charakter des bekannten Werkes des Verf. und H. Hopfs, aus dem es im übrigen viele kleinere und größere Stellen ausdrücklich entlehnt, und führt den Leser in einem zwar weit ausholenden, aber stets organisch zusammenhängenden und gegliederten Aufbau zu den angestrebten Höhepunkten. Die Schwierigkeiten und nicht immer verlockenden komplizierten Einzelheiten des technischen Aufbaues, etwa beim Aufbau der sehr verzweigten Homologie- und Kohomologietheorie, werden keineswegs umgangen, sondern in aller Ausführlichkeit und ohne zweifelhafte Entnahmen aus der sogenannten Anschauung dargelegt und genau ausgeführt. An solchen Stellen fürchtet Verf. glücklicherweise nicht, „langweilig und umständlich zu sein“. Wenn hierbei, wie Verf. seinerseits betont, nicht immer die größte zur Zeit mögliche Kürze und Eleganz erreicht ist, so liegt das an den Zeitumständen, die das Erscheinen des schon 1941 im wesentlichen fertiggestellten Werkes verzögerten. Beispiele, die sonst in der topologischen Literatur meist stiefmütterlich behandelt werden, und ebenso Figuren sind in reicher Fülle vorhanden und sorgfältig in den Zusammenhang des Ganzen eingegliedert. Der konsequente Aufbau der eigentlichen Theorie wird vielfach unterbrochen durch Seitenblicke auf benachbarte Gebiete, Hinweise auf Beweisvarianten, Anforderungen an den Leser, Einzelheiten ausführlich auszuarbeiten, Verbindungen zu anderen Stellen herzustellen und andere Literatur einzusehen. Zahlreiche Hinweise und Ratschläge über die Reihenfolge für das Studium des Anfängers werden gegeben. Liebevoller Einzelausführung und pädagogisches Geschick leiten den Leser ohne allzu große Mühe über alle Schwierigkeiten hinweg zielbewußt zu den Hauptresultaten. — Die ersten beiden Teile I und II bringen die grundlegenden Begriffe und die einfachsten Tatsachen aus der Punktmengenlehre und der kombinatorischen Topologie in breiter Ausführlichkeit und mit gelegentlichen weiteren Ausblicken. Weiter behandeln sie eine Reihe historisch und sachlich wichtiger, noch ohne die allgemeine Homologie darstellbarer Sätze, die zwar im späteren Aufbau nicht benötigt werden, aber nach Inhalt und besonders nach Art der Beweisführung den Leser in geschickter Weise auf die späteren Begriffsbildungen vorbereiten. Es handelt sich um den Jordanschen Kurvensatz, mit dem Beweis von E. Schmidt, eine bis in alle Einzelheiten ausgeführte Flächentheorie, das Spernersche Lemma, den Pflastersatz und endlich den Existenzsatz über Fixpunkte bei Abbildungen eines Simplexes. — Der zentrale Teil III bringt, in ganz besonderer Ausführlichkeit und mit vielen Beispielen erläutert, die Theorie der Bettischen Gruppen. Zunächst werden die Homologie- und Kohomologiegruppen (untere, Δ -Gruppen und obere, ∇ -Gruppen) für Polyeder eingeführt, und zwar über beliebigen, nicht topologisierten Koeffizientengruppen. Die Rolle der speziellen Koeffizientengruppen der ganz rationalen Zahlen, der ganz rationalen Zahlen mod m , der rationalen Zahlen und der reellen Zahlen mod 1 wird besonders behandelt. Auch kanonische Basen für Δ - und ∇ -Gruppen werden herangezogen. Es folgt der Invarianzbeweis für die Bettischen Gruppen von Polyedern auf Grund simplizialer Approximation. Die nächsten Kapitel übertragen den Begriff der Δ -Gruppen von Polyedern auf allgemeine Kompakta. Dabei werden nicht die sogenannten stetigen Zyklen zugrunde gelegt, sondern die vom Verf. eingeführten „wahren Zyklen“, eine an die Vietoris'schen Zyklen erinnernde Bildung, die folgendermaßen erklärt ist. Ist ε eine Zahl > 0 , so heißt jedes System mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ von $r+1$ Punkten eines metrischen Raumes ein r -dimensionales ε -Simplex; mit Hilfe dieser ε -Simplexe werden in bekannter Weise die ε -Zyklen z^ε und der Begriff der ε -Homologie definiert. Nun heißt eine Folge z^ε ($\varepsilon = 1, 2, \dots$) von δ_ν -Zyklen ein r -dimensionaler wahrer Zyklus, wenn $\delta_\nu \rightarrow 0$ geht mit $\nu \rightarrow \infty$ und wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\nu(\varepsilon)$ existiert, so daß für $\nu' > \nu(\varepsilon)$ und $\nu'' > \nu(\varepsilon)$ gilt, daß $z^{\nu'}$ ε -homolog zu $z^{\nu''}$ ist. — Die Invarianz der Bettischen Gruppen ergibt sich hier auf eine neue Art. Weiter werden behandelt die relativen Zyklen und die lokalen Betti-Gruppen, mit deren Hilfe später die Definition der kombinatorischen Mannigfaltigkeiten ausgeführt wird. Hier findet sich auch eine kurze Einführung in den Begriff

der Homologie-Dimension und deren einfachste Eigenschaften. — Teil IV bringt die Hauptresultate des Buches, nämlich die Sätze über Mannigfaltigkeiten und die Dualitätssätze von Poincaré und Alexander. Zunächst werden die Mannigfaltigkeiten, duale Triangulationen und der Poincarésche Dualitätssatz unter Einbeziehung kanonischer Basen entwickelt. Dann wird, zum Beweis des allgemeinen Alexanderschen Dualitätssatzes, die ∇ -Theorie auf beliebige Kompakten und Bikompakten übertragen. Dabei werden die Schnittbildung und die Schnittzahlen benutzt, die in diesem Buch allerdings nur für den Fall komplementärer Dimensionen, d. h. für den Fall eines nulldimensionalen Schnittes, behandelt werden. Während in den früheren Kapiteln die wahren Zyklen sich als bequem und angemessen erwiesen, wird jetzt die Theorie der Spektren herangezogen, die sich auf die teilweise geordnete Menge aller endlichen offenen und abgeschlossenen Überdeckungen des Raumes gründet. Als Vorstufe für den allgemeinen Alexanderschen Satz wird zunächst der kombinatorische Fall dieses Satzes bewiesen, ein Satz über die Lage von Unterkomplexen einer kombinatorischen Mannigfaltigkeit, dann folgt der Alexandersche Dualitätssatz selbst. In einem nachfolgenden besonderen Kapitel, das von der vorher behandelten Theorie der Spektren unabhängig ist, wird der sogenannte kleine Alexandersche Dualitätssatz noch einmal bewiesen, der die krummen Polyeder betrifft, speziell der verallgemeinerte Jordan-Brouwersche Satz im n -dimensionalen Raum, und zwar auf der Grundlage der Verschlingungen von Zyklen im n -dimensionalen kartesischen Raum, deren Theorie an dieser Stelle entwickelt wird. — Der letzte Teil V behandelt stetige Abbildungen von Polyedern, insbesondere von Mannigfaltigkeiten und speziell von Sphären. Hierbei wird besonderer Wert gelegt auf unmittelbare Anschaulichkeit sowohl der dargestellten Ergebnisse als auch der Beweisführung. Besonders hervorgehoben werden der lokale Abbildungsgrad, der Fall topologischer Abbildungen, Vektorfelder und Klassifikationen von Abbildungen. Auf einigen dieser Gebiete wurden seit Erscheinen des Buches ergänzende und vereinfachende Ergebnisse gefunden. Die Darstellung schließt sich bei der Behandlung dieser Gegenstände teilweise sachlich an die entsprechenden Teile des Alexandroff-Hopfschen Buches an. Das letzte Kapitel über die Homologietheorie der Fixpunkte stetiger Abbildungen ist fast vollständig aus diesem Buche übernommen, ebenso wie die beiden Anhänge über Abelsche Gruppen und Grundlagen aus der analytischen Geometrie. — Außerhalb des Rahmens des Buches liegen alle Homotopiemethoden, insbesondere die Fundamentalgruppe, Überlagerungen und die Homotopiegruppen. Franz.

Boltjanskij, V.: Über die dimensionelle Vollwertigkeit der Kompakten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 773—776 (1949) [Russisch].

Das Kompaktum X heiße dimensionell vollwertig, wenn für ein beliebiges Kompaktum Y gilt: $(1) \dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$. Verf. hat (dies. Zbl. 35, 387) Beispiele von dimensionell nicht vollwertigen Kompakta gegeben, und zwar konstruierte er für jeden Primzahlwert p ein derartiges Kompaktum P_p . Er beweist jetzt: Für die dimensionelle Vollwertigkeit des Kompakts X^n ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingung (1) für $Y = P_p$ bei beliebigem p gilt. Es seien p eine Primzahl und $Z^n = (z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n, \dots)$ ein Zyklus von X^n (relativ Φ) mit folgender Eigenschaft: z_k^n ist ein (Relativ-)Zyklus mod p^{α_k} . Wenn $\alpha_k \rightarrow \infty$ strebt mit $k \rightarrow \infty$, heiße Z^n (Relativ-)Zyklus mod p^ω . Wenn in X^n ein (Relativ-)Zyklus $Z^{*n} = (z_1^{*n}, z_2^{*n}, \dots, z_k^{*n}, \dots)$ existiert, derart, daß z_k^{*n} (Relativ-)Zyklus mod p^{α_k} ist und die Koeffizienten aller Zyklen z_k^{*n} durch p teilbar sind, wenn außerdem $Z^n \sim Z^{*n}$ (relativ Φ) in X^n ist, so heiße Z^n homologie-teilbar durch p . X^n heiße dimensionell vollwertig mod p , wenn ein (Relativ-)Zyklus Z^n mod p^ω in X^n existiert, der nicht homologie-teilbar durch p ist. X_n heiße algebraisch dimensionell vollwertig, wenn X^n dimensionell vollwertig mod jeder Primzahl p ist. — Verf. beweist: 1. Ein Kompaktum ist dann und nur dann dimensionell vollwertig, wenn es algebraisch dimensionell vollwertig ist. 2. Das Kompaktum X^n ist dann und nur dann dimensionell vollwertig, wenn für jede Primzahl p gilt: $\dim_{Q_p} X^n = \dim X^n$, wobei \dim_{Q_p} die Cohomologiedimension bei Zugrundelegung der Gruppe Q_p bedeutet. Mit Q_p wird die additive Gruppe aller rationalen Zahlen der Gestalt $m/p^k \pmod{1}$ bezeichnet.

Thimm (Bonn).

Young jr., Gail S.: On continuous curves irreducible about compact sets. Bull. Amer. math. Soc. 55, 439—441 (1949).

Von L. Zippin [Fundam. Math. 20, 197—205 (1933); dies. Zbl. 6, 371] stammt folgendes Problem: Gegeben sei eine kompakte Menge K in einem lokal zusammenhängenden vollständigen metrischen Raume S . Dann enthält S ein kompaktes

Kontinuum M , das irreduzibel über K ist. Welche Bedingungen muß K erfüllen, damit M lokal zusammenhängend gewählt werden kann? — L. Zippin fand als notwendige Bedingung: K muß eine „Kurvenmenge“ sein, d. h. die nichtentarteten Komponenten von K sind lokal zusammenhängend und bilden eine Nullfolge. Verf. beweist, daß diese Bedingung auch hinreicht, wenn S ein konvexmetrischer Raum ist. Er verweist auf einen Satz von R. H. Bing [Bull. Amer. math. Soc. 54, 224 (1948), Abstract], nach dem jeder endlichdimensionale Peano-Raum eine konvexe Metrik besitzt. Damit ist für diese Räume Zippins Problem gelöst. *Thimm.*

Floyd, E. E.: Some characterizations of interior maps. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 571—575 (1950).

L'A. caractérise les transformations quasi-monotones introduites par A. D. Wallace [Duke Math. J. 7, 136—145 (1940); ce Zbl. 24, 285] ainsi que les transformations intérieures du référent (Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Paris 1938; ce Zbl. 17, 378) et G. T. Whyburn (Analytic topology, 1942, p. 186) à l'aide de deux théorèmes qui mettent en évidence le caractère 1-dimensionnel des transformations en question. Le premier se rapporte aux transformations continues en circonférence [Eilenberg, Fundam. Math. 24, 160—176 (1935); ce Zbl. 10, 277] ainsi qu'aux premiers groupes de cohomologie de Čech $H^1(\bar{V}, \bar{V} - V)$ et $H^1(\bar{U}, \bar{U} - U)$, V étant un domaine de $Y = f(X)$ et U une composante de $f^{-1}(V)$. Le second affirme qu'une transformation $h: I \rightarrow Y$, $I = [0, 1]$, peut être factorisée $h = fg$, où $f: X \rightarrow Y$, intérieure, est donnée d'avance, en généralisant ainsi un théorème du référent et de G. T. Whyburn. Les espaces sont supposés compacts et localement connexes. *S. Stoilow (Bucarest).*

Floyd, E. E.: The extension of homeomorphisms. Duke math. J. 16, 225—235 (1949).

Let A, B be compact metric spaces, $P \subset A$ and $Q \subset B$ given open sets; $f: \bar{P} \rightarrow \bar{Q}$ is a continuous mapping, whose restriction $f|P$ is a homeomorphism from P onto Q . The au. investigates the action of f on the boundary $P^* = \bar{P} - P$ of P . He indicates that to obtain interesting results one must either place restrictions on the image Q or on the map f , as otherwise the action of f on P^* can be arbitrarily „pathological“, i. e. $f|P^*$ may be any continuous function. In the first part of the paper the au. proves some general theorems, and investigates important special cases concerning n -sphere and plane curves. In the second part algebraic conditions are imposed on Q and f . The uniformly locally i -connectedness (i -ulc) is defined in terms of Vietoris homology theory; if a space is i -ulc, for all i , $0 \leq i \leq n$, it is said to be ulc^n . Theorem: Suppose P is ulc^{n-1} and Q is n -ulc. Then each $f^{-1}(y)$ ($y \in Q^*$) is n -acyclic. Corollary. If P is ulc^{n-1} and Q ulc^n , then $f|Q^*$ is n -monotone (i. e. $f^{-1}(y)$ is i -acyclic, for $i = 0, \dots, n$). Suppose P is ulc^n . Then a necessary and sufficient condition that Q be n -ulc is that every $f^{-1}(y)$ ($y \in Q^*$) be n -acyclic. Corollary. Let P be ulc^n . Then necessary and sufficient condition that Q be ulc^n is that $f|P^*$ be n -monotone. *Fáry (Paris).*

Knoblauch, E. A.: Extensions of homeomorphisms. Duke math. J. 16, 247—259 (1949).

Es seien M_1, M_2 Mannigfaltigkeiten und K_1, K_2 Peano-Kontinua; es liege K_i in M_i , $i = 1, 2$. Es gebe eine Homöomorphie $K_2 = \Phi(K_1)$. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu finden, daß eine Homöomorphie $M_2 = \Phi'(M_1)$ existiert, die für $x \in K_1$ mit Φ übereinstimmt. — Verf. löst diese Aufgabe für den Fall, daß M_1 und M_2 Torusse oder projektive Ebenen sind. Wie in dem von Adkisson und Mac Lane [Duke math. J. 6, 216—228 (1940); dies. Zbl. 26, 363] untersuchten Fall der 2-Sphären ist auch hier der Begriff der Indexkurven wesentlich. Indexkurven sind H - oder X -Kurven. Eine H -Kurve ist ein

geordnetes Paar von Bögen $(axyb, cxyd)$ mit der Eigenschaft

$$axyb \cap cxyd = xy, \quad a \neq x \neq b, \quad c \neq x \neq d, \quad a \neq y \neq b, \quad c \neq y \neq d.$$

Eine X -Kurve ist ein geordnetes Paar von Bögen

$$(azb, czd), \quad azb \cap czd = z, \quad a \neq z \neq b, \quad c \neq z \neq d.$$

Wenn die Kurve $axyb$ (bzw. azb) in einer 2-Zelle liegt, hat sie in dieser zwei Seiten. Die H - (bzw. X -)Kurve stellt eine Überkreuzung dar, wenn $cx - x$ und $yd - y$ (bzw. $cz - z$ und $zd - z$) auf verschiedenen Seiten liegen. Im Fall der Überkreuzung werde $\varepsilon(H)$ [bzw. $\varepsilon(X)$] $= -1$ gesetzt, im anderen Fall sei diese Signatur $+1$. — Das Hauptergebnis der Arbeit besteht in dem folgenden Satz: M_1 und M_2 seien projektive Ebenen (bzw. Torusse). $K_i \subset M_i$, $i = 1, 2$, seien homöomorphe Peano-Kontinua. $K_2 = \Phi(K_1)$. Φ läßt sich dann und nur dann zu einer Homöomorphie von M_1 und M_2 erweitern, wenn: 1. $\varepsilon\{\Phi(\gamma_1)\} = \varepsilon(\gamma_1)$ für jede Indurke γ_1 von K_1 . 2. Wenn C_1 eine einfache geschlossene Kurve von K_1 ist, so begrenzt C_1 dann und nur dann eine 2-Zelle von M_1 , wenn $C_2 = \Phi(C_1)$ eine 2-Zelle von M_2 begrenzt. 3. Wenn C_1 eine einfache geschlossene Kurve von K_1 ist, welche eine 2-Zelle Σ_1 von M_1 begrenzt und wenn $x_1 \in K_1 - C_1$ ist, dann gilt dann und nur dann $x_1 \in \Sigma_1$, wenn $x_2 = \Phi(x_1)$ in Σ_2 liegt, wobei Σ_2 die 2-Zelle von M_2 ist, welche durch die einfache geschlossene Kurve $C_2 = \Phi(C_1)$ begrenzt wird.

Thimm (Bonn).

Hu, Sze-Tsen: A group multiplication for relative homotopy groups. J. London math. Soc. **22**, 61—67 (1947).

Y und Y_0 seien bogenverknüpfte Räume, $Y_0 \subset Y$, und $y_0 \in Y_0$ ein Punkt. Die relative Homotopiegruppe $\pi^{r+1}(Y, Y_0)$, $r \geq 1$, mit dem Grundpunkt y_0 kann dargestellt werden durch die Homotopieklassen derjenigen stetigen Abbildungen des Würfels $I^{r+1}: 0 \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq x_1, \dots, x_r \leq 1$, in Y , die die Fläche $x_0 = 1$ in Y_0 , alle anderen Randpunkte auf y_0 abbilden. (Wie die Gruppenoperation auszuführen ist, wird angegeben.) Statt dessen kann man auch die folgenden Abbildungen benutzen — wir geben die Definition diesmal für $\pi^r(Y, Y_0)$ an: C^r bezeichne denjenigen Teil des Randes von I^{r+1} , auf dem mindestens ein $x_0, 0 \leq x_0 \leq 1$, gleich 0 oder 1 ist. ∂ sei eine stetige Abbildung von I^r auf C^r , die jeden Querschnitt $x_0 = t$ ($0 \leq t \leq 1$) von I^r auf den entsprechenden Querschnitt von C^r mit dem Grade 1 so abbildet, daß der ganze Rand des Querschnitts von I^r auf den Punkt $x_0 = t$, $x_1 = \dots = x_r = 0$ abgebildet wird. F bilde C^r so in Y ab, daß das Bild des Querschnitts $x_0 = 1$ in Y_0 liegt und alle Punkte mit $x_0 = 0$ und mit $x_1 = \dots = x_r = 0$ auf y_0 abgebildet werden. Die Homotopieklassen von $F\partial$ repräsentieren die Elemente von $\pi^r(Y, Y_0)$; von der speziellen Wahl von ∂ hängt die Definition nicht ab. — Verf. definiert zu je zwei Elementen $\alpha \in \pi^{m+1}(Y, Y_0)$, $\beta \in \pi^{n+1}(Y, Y_0)$ ein Produkt $\alpha \circ \beta \in \pi^{m+n}(Y, Y_0)$. α und β seien durch Abbildungen f und g der zuerst beschriebenen Art repräsentiert; für I^{n+1} werden dabei die Koordinaten $x_0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$ benutzt. p und q bezeichnen die Projektionen von I^{m+n+1} auf den x_0, x_1, \dots, x_m -Raum bzw. den $x_0, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$ -Raum. Ein Repräsentant der zweiten Art für $\alpha \circ \beta$ wird definiert durch die Abbildung Φ von C^{m+n} in Y :

$$\Phi(x) = \begin{cases} fp(x), & \text{falls } x_v = 0 \text{ oder } 1 \text{ für wenigstens ein } v = m+1, \dots, m+n, \\ gq(x), & \text{falls } x_\mu = 0 \text{ oder } 1 \text{ für wenigstens ein } \mu = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Es gilt: $\alpha \circ 0 = 0$, $0 \circ \beta = 0$. $\beta \circ \alpha = (-1)^{mn} \alpha \circ \beta$. $\alpha \circ \eta$ und $\xi \circ \beta$ (α, β fest; η, ξ variabel) sind Homomorphismen. Für die gewöhnlichen Homotopiegruppen ($Y_0 = y_0$) liefert diese Multiplikation immer das Nullelement. — Bezeichnet man als Rand $\partial\alpha$ von α dasjenige Element von $\pi^m(Y_0)$, das durch das Bild von $x_0 = 1$ repräsentiert wird, so besteht folgender Zusammenhang mit dem von Whitehead [Ann. Math., Princeton, II. S. **42**, 409—428 (1941); dies. Zbl. **27**, 264] für die gewöhnlichen Homotopiegruppen eingeführten Produkt: $\partial(\alpha \circ \beta) = \partial\alpha \circ \partial\beta$ (rechts steht das Whitehead-Produkt).

Pannwitz (Berlin).

Whitney, Hassler: An extension theorem for mappings into simply connected spaces. Ann. Math., Princeton, II. S. **50**, 285—296 (1949).

Cet article traite de la classification des applications d'un complexe K à 3 dimensions dans un espace simplement connexe R , pour lequel $\Pi_2(R)$ peut admettre des éléments d'ordre fini. Ce faisant, l'A. rectifie un résultat précédemment énoncé

[Bull. Amer. math. Soc. **46** (1940)]: la formule $w_4 = j^*z \cup j^*z$ qui donne l'expression de la seconde obstruction n'est valable que si $\Pi_2(R)$ ne contient pas d'éléments d'ordre pair; sinon, elle doit être remplacée par une formule plus compliquée, qui, en fait, se réduit à la forme $w_4 = p(j^*z)$, où z est la classe caractéristique de l'application, et p le carré de Pontrjagin, défini à l'aide d'un accouplement convenable de $\Pi_2(R) \otimes \Pi_2(R)$ sur $\Pi_3(R)$. La démonstration géométrique et constructive de l'A. est assez peu claire; si elle a l'avantage d'expliquer l'introduction des i -produits dans la formule finale, elle n'en paraît pas moins difficile et inutilement compliquée; il semble qu'un procédé inspiré de la méthode des „complexes modèles“ conduirait plus rapidement au résultat. *Thom* (Strasbourg).

Dowker, C. H.: Mapping theorems for non-compact spaces. Amer. J. Math. **69**, 200—242 (1947).

Es werden der Satz von N. Bruschlinsky [Math. Ann. **109**, 525—537 (1934); dies. Zbl. **8**, 373] über Abbildungen von Polyedern in die Sphäre S^1 und der Hopfsche Erweiterungs- und Klassifikationssatz in der Formulierung von H. Whitney [Duke Math. J. **3**, 51—55 (1937); dies. Zbl. **16**, 229] auf allgemeine Räume übertragen. Der Klassifikationssatz wird so zu den beiden folgenden Sätzen verallgemeinert: Die Homotopieklassen von Abbildungen eines normalen parakompakten Raumes R der Dimension $\leq n$ in die Sphäre S^n stehen in eindeutiger Beziehung zu den Elementen der n -ten Cohomologiegruppe von R , berechnet unter Zugrundelegung unendlicher offener Überdeckungen und ganzzahliger Koeffizienten. Die Klassen gleichmäßig homotoper Abbildungen eines normalen Raumes R der Dimension $\leq n$ in S^n stehen in eindeutiger Beziehung zu den Elementen der n -ten ganzzahligen Cohomologiegruppe, berechnet unter Zugrundelegung endlicher offener Überdeckungen. Die Dimensionszahl eines normalen Raumes hängt dabei — wie Verf. zeigt — nicht davon ab, ob ihrer Definition endliche, lokal endliche oder sternendliche offene Überdeckungen zugrunde gelegt werden. Die entsprechende Übertragung des Satzes von Bruschlinsky gestattet Verf., die erste Cohomologiegruppe der Geraden (endliche offene Überdeckungen) zu bestimmen: Sie ist isomorph der Faktorgruppe der Gruppe aller stetigen reellen Funktionen auf der Geraden nach der Untergruppe der beschränkten Funktionen. *Specker* (Zürich).

Postnikov, M. M.: Homologieinvarianten stetiger Abbildungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 161—164 (1949) [Russisch].

Zur allgemeinen Lösung der Aufgabe, die Klassen homotoper Abbildungen eines Komplexes X in einen Raum Y durch bestimmte Ketten so zu charakterisieren, daß homotopen Abbildungen homologe Ketten entsprechen, werden „Systeme lokaler Gruppen des Raumes X “ benutzt. [Steenrod, Ann. Math., Princeton, II. S. **44**, 610—627 (1943)], mit deren Hilfe eine Homologietheorie aufgebaut wird. Diese „Homologietheorie mit lokalen Koeffizienten“ ist eine Form der „Homologietheorie mit nichtabelschem Koeffizientenbereich“ [H. Robbins, Trans. Amer. math. Soc. **49**, 308—324 (1941); dies. Zbl. **24**, 361]. Im vorliegenden Fall wird das System lokaler Gruppen durch die Homotopiegruppen $\pi_y^p(Y)$ irgendeiner Dimension p geliefert, wobei der Punkt $y \in Y$ derjenige Punkt ist, der bei der Konstruktion der Homotopiegruppe ausgezeichnet wird. Für die Anwendung der genannten Theorie erweist sich eine Einschränkung des allgemeinen Zellenbegriffs als notwendig. Eine q -dimensionale Zelle σ^q mit einfach zusammenhängender abgeschlossener Hülle σ^q heiße „Wabe“, wenn es eine Abbildung des q -dimensionalen abgeschlossenen Würfels I^q auf σ^q gibt, die den (offenen) Würfel I^q auf σ^q homöomorph abbildet. — K sei ein Zellenkomplex, und K^p sei die Vereinigungsmenge der $\leq p$ -dimensionalen Waben von K . Auf die Wabenkomplexe K^p kann die Theorie angewandt werden. Den Abbildungen f und g von K^p in Y wird eine Kette mit lokalen Koeffizienten zugeordnet, die „unterscheidende“ Kette von f und g genannt wird. Mittels solcher Ketten gelingt die Klassifikation der Abbildungen von K in Y . *Thimm* (Bonn).

Pontrjagin, L.: Die Homotopiegruppe $\pi^{n+1}(K_n)$ ($n \geq 2$) der Dimension $n+1$ eines zusammenhängenden, endlichen Polyeders beliebiger Dimension, dessen Fundamentalgruppe und Bettische Gruppen der Dimensionen $2, \dots, n-1$ die trivialen sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 797—800 (1949) [Russisch].

Mittels des von Steenrod (dies. Zbl. 30, 416) eingeführten \cup_i -Produktes wird die Hopfsche Homotopieinvariante γ auf den Fall der simplizialen Abbildung des Randes S^{n+1} eines triangulierten Elementes P^{n+2} in die triangulierte Sphäre S^n verallgemeinert. — H_q^n sei ein Polyeder, das aus q Sphären $S_1^n, S_2^n, \dots, S_q^n$ mit einem gemeinsamen Punkte besteht. Die Struktur der Homotopiegruppe $\pi^{n+1}(H_q^n)$ läßt sich durch Matrizen beschreiben, deren Elemente die erwähnten Invarianten sind. — Damit ist das Werkzeug gefunden zur Lösung der folgenden Aufgabe: K_n sei ein Polyeder mit den in der Überschrift erklärten Eigenschaften. Es ist $\pi^{n+1}(K_n)$ zu beschreiben. — Ist $\Delta_r(K_n)$ die r -dimensionale Homologiegruppe mit ganzzahligem Koeffizientenbereich, so besteht eine Homomorphie Φ_r von $\pi^r(K_n)$ in $\Delta_r(K_n)$. Im Fall $r = n+1$ ist Φ_{n+1} eine „Homomorphie auf“. Der Kern dieser Homomorphie sei $\pi_0^{n+1}(K_n)$. Verf. gibt ein System von Erzeugenden und Relationen von $\pi_0^{n+1}(K_n)$ an. Ferner erklärt er ein Verfahren zur Berechnung von $\pi^{n+1}(K_n)$. Diese Untersuchungen erfordern die Unterscheidung der beiden Fälle $n=2$ und $n \geq 3$. Zum Schluß gibt Verf. eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß ein Element von $\Delta_{n+2}(K_n)$ eine sphärische Homologiekategorie ist, d. h. zu $\Phi_{n+2}(\pi^{n+2}(K_n))$ gehört. — Beweise fehlen in der Arbeit. *Thimm.*

Dugundji, J.: A topologized fundamental group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 141—143 (1950).

L'A. généralise ici la théorie des revêtements dans le cas d'un espace Y qui n'est pas LC_1 ; il utilise dans ce but le groupe fondamental topologisé de Hurewicz χ , défini à l'aide de ε -homotopies. Il montre qu'alors les revêtements \hat{Y} de Y sont en correspondance biunivoque avec les sous-groupes ouverts χ' de χ ; le groupe fondamental de \hat{Y} est alors χ' : il n'y a donc pas en général de revêtements universels. Les sous-groupes fermés donnent naissance à des espaces qui ne sont pas de vrais revêtements (en tant qu'espaces fibrés à fibre discrète), mais pour lesquels l'„homotopy covering theorem“ reste valable. *Thom (Strasbourg).*

Chern, Shiing-Shen and Yi-Fone Sun: The imbedding theorem for fibre bundles. Trans. Amer. math. Soc. 67, 286—303 (1949).

Les AA. démontrent l'existence d'espaces fibrés universels E pour certaines classes d'espaces fibrés de base B , de fibre F , et de groupe structural G . [On dit brièvement que E est universel pour (F, B, G) .] L'article débute par un exposé bref, mais complet, des principales définitions et propriétés des espaces fibrés (avec les démonstrations); les AA. définissent la structure d'espace fibré à l'aide d'un atlas associé à un pseudo-groupe convenable d'homéomorphismes locaux de $B \times F$ (Ch. Ehresmann). — Si B est un complexe fini de dimension n et si F et G sont donnés les AA. démontrent les propriétés suivantes. — S'il existe un espace fibré principal qui est un espace fibré universel pour (G, B, G) , alors il existe également un espace fibré universel pour (F, B, G) . — Si les groupes d'homotopie $\pi_i(E)$, $0 \leq i \leq n-1$ de l'espace fibré principal $E(G, B^*, G, H^*)$ sont nuls, tout espace fibré principal $E(G, B, G, H)$ est équivalent à l'espace fibré associé à une application convenable de B dans B^* . — Si en plus des hypothèses de la proposition précédente $\pi_n(E)$ est nul, les espaces fibrés associés à deux applications h et h' de B dans B^* sont équivalentes si et seulement si h et h' sont homotopes. — Si G est un sous-groupe du groupe linéaire L_{n+1} de R^{n+1} , il existe un espace fibré principal $E(G, B^*, G, H^*)$ dont les groupes d'homotopie $\pi_i(E)$ sont nuls pour $0 \leq i \leq n$. — Ces 4 propositions contiennent le théorème d'existence annoncé. Dans les paragraphes suivants les AA. élargissent les hypothèses faites sur B , ils introduisent la notion d'un anneau

caractéristique (à priori non unique) d'un espace fibré admettant un espace fibré universel, et finalement ils déterminent explicitement des espaces fibrés universels dans le cas où G est un groupe classique. *Réeb* (Strasbourg).

Chern, Shiing-Shen and Sze-Tsen Hu: Parallelisability of principal fibre bundles. Trans. Amer. math. Soc. **67**, 304—309 (1949).

Soit $E(G, B)$ un espace fibré principal de base B (où B est un complexe fini) et de groupe structural G (G connexe). Soit f une section de $E(G, B)$ au-dessus du squelette B_{n-1} à $(n-1)$ dimensions de B ; à f est associé un cocycle caractéristique $w_n(f)$ de B . Si g est une autre section au-dessus de B_{n-1} , on peut définir une application φ (notée $f^{-1}g$) de B_{n-1} dans G ; réciproquement la donnée de f et φ détermine g . On a $w_n(g) = w_n(f) + c_n(\varphi)$ [où $c_n(\varphi)$ est le cocycle associé à φ (Eilenberg)]. De ce dernier résultat on déduit des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'une section au-dessus de B_n (l'existence d'une section au-dessus de B_{n-1} étant admise). *Reeb* (Strasbourg).

Wu, Wen-Tsun: Sur les classes caractéristiques d'un espace fibré en sphères. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 582—584 (1948).

Es seien \mathfrak{S} ein Sphärenbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , f die Projektionsabbildung von \mathfrak{S} auf M , \mathfrak{S}^* , M^* die Tangentenbündel von \mathfrak{S} , M . Dann bestehen die Beziehungen $W_2(\mathfrak{S}^*) = f^* W_2(\mathfrak{S}) \cup f^* W_2(M^*)$, $\bar{W}_2(\mathfrak{S}^*) = f^* \bar{W}_2(\mathfrak{S}) \cup f^* \bar{W}_2(M^*)$. [Dabei ist $W_2(\mathfrak{S}) = \sum W_2^r(\mathfrak{S}) t^r$, $W_2^r(\mathfrak{S})$ r -te charakteristische Klasse von \mathfrak{S} reduziert mod 2, entsprechend für \mathfrak{S}^* und M^* , $W_2 \cup \bar{W}_2 = 1$, f^* der f zugeordnete Homomorphismus.] Folgerungen: Dafür, daß eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M in Sphären der Dimension d gefasert werden kann, ist notwendig, daß $W_2^r(M^*) = \bar{W}_2^r(M^*) = 0$ für $r > n - d$. Die charakteristischen Klassen der Stiefelschen Mannigfaltigkeiten $V_{n,m}$ ($m > 1$) sind 0. *Specker*.

Wu, Wen-Tsun: Sur le second obstacle d'un champ d'éléments de contact dans une structure fibrée sphérique. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 815—817 (1948).

Verf. untersucht nichtorientierte Linielemente in einem Sphärenbündel \mathfrak{S}^{n-1} über dem Komplex K . Das erste Hindernis ist 0, ζ^n (ganzzahlige Koeffizienten) sei das zweite Hindernis, das zu einer Schnittfläche φ über dem $(n-1)$ -dimensionalen Gerüst K^{n-1} von K gehört. Ist ψ eine von einem Vektorfelde herrührende Schnittfläche über K^{n-1} , so hängt die Differenzcohomologieklass ξ_2^k von φ und ψ (Dimension 1, Koeffizienten mod 2) nur von φ ab und ζ_2^n (ζ^n reduziert mod 2) drückt sich durch ξ_2^1 und W_2^k (mod 2 reduzierte k -dimensionale charakteristische Klasse von \mathfrak{S}^{n-1}) folgendermaßen aus: $\zeta_2^n = (\xi_2^1)^n + W_2^1 (\xi_2^1)^{n-1} + \dots + W_2^{n-1} \xi_2^1 + W_2^n$. Analoge Formeln gelten für Felder zweidimensionaler Flächenelemente und komplexer Linielemente (welch letzte — unveröffentlichte — Formel von E. Kundert nach Verf. die vorliegende Note angeregt hat). *Specker* (Zürich).

Wu, Wen-Tsun: Sur la structure presque complexe d'une variété différentiable réelle de dimension 4. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1076—1078 (1948).

Die fastkomplexen Strukturen (Ch. Ehresmann, Sur la topologie des espaces fibrés, in Topologie algébrique, Paris 1947) einer vierdimensionalen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit M stehen in eindeutiger Beziehung zu den ganzzahligen zweidimensionalen Cohomologieklassen C^2 von M , die folgende Gleichungen befriedigen: $(C_2)_2 = W^2$, $C^2 \cup C^2 = W_1^4 + 2W_2^4$. W^2 und W_2^4 sind dabei definiert als Bilder gewisser Cohomologieklassen einer Graßmannschen Mannigfaltigkeit G beim Homomorphismus, welcher der Abbildung von M in G entspricht, die das Tangentenbündel von M induziert; $(\)_2$ ist die Reduktion mod 2. *Specker* (Zürich).

Pontrjagin (Pontriagin), L. S.: Die charakteristischen Zyklen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Mat. Sbornik, n. S. **21** (63), 233—284 (1947) [Russisch].

In diesem und den beiden folgenden Referaten werden Mannigfaltigkeiten und ihre Abbildungen als (hinreichend oft stetig) differenzierbar vorausgesetzt. Eine Abbildung f einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit M^k in eine $M^{k'}$ heiße regulär im Punkte x , wenn die Funktionalmatrix der Abbildungsfunktionen, ausgedrückt in den lokalen Koordinaten im Punkte x bzw. $f(x)$, den höchstmöglichen Rang $[= \text{Min}(k, k')]$ hat; Punkte, in denen der Rang der Funktionalmatrix $p < \text{Min}(k, k')$ ist, sind kritische Punkte vom Typus p ; ist f überall regulär, so heißt f eine reguläre Abbildung. — Verf. stellt ein System von Homologieinvarianten einer geschlossenen, orientierten M^k gegen reguläre topologische Abbildungen auf. M^k sei abstrakt gegeben, $f(M^k)$ ein reguläres Bild von M^k in einem Euklidischen Raum R^{k+l} , $l \geq 1$. $H(k, l)$ sei die Mannigfaltigkeit der orientierten, k -dimens. linearen Unterräume von R^{k+l} durch einen Punkt O ; sie ist orientierbar, ihre Dimension kl . f bestimmt ein Tangentenbild $T(M^k)$ von M^k in $H(k, l)$ dadurch, daß jedem Punkt $x \in M^k$ dasjenige Element $T_x \in H(k, l)$ zugeordnet wird, das dem übereinstimmend mit $f(M^k)$ orientierten k -dimens. Tangentialraum im Punkte $f(x)$ an $f(M^k)$ parallel ist. Z sei ein Zyklus in $H(k, l)$. Wenn die Dimension von $H(k, l)$ groß genug ist, gibt es in $H(k, l)$ in der Nähe von $T(M^k)$ ein topologisches Bild $t(M^k)$ von M^k in allgemeiner Lage zu Z . Das Original X des Schnittes $Z \times t(M^k)$ in M^k ist ein Zyklus. Diejenigen Zyklen Z_χ und ΓZ_χ , die man auf diese Weise, ausgehend von gewissen, unten angegebenen Zyklen Z_χ bzw. ΓZ_χ für $l \geq k+1$ erhält, sind die charakteristischen Zyklen (Zahlen, falls sie nulldimensional sind) der M^k . Ihre Homologieklassen sind Invarianten der M^k gegen reguläre topologische Abbildungen. Sie hängen nicht von f und l ab; genauer: 1. Wenn für einen bestimmten Index χ der Zyklus Z_χ in $H(k, l)$ erklärt ist, so ist für jedes $l' \geq l$ ein Z_χ in $H(k, l')$ erklärt, und wenn $R^{k+l} \subset R^{k+l'}$, $H(k, l) \subset H(k, l')$, so ist (bei allgemeiner Lage) Z_χ der Schnitt von $H(k, l)$ mit Z_χ ; ferner erhält man bei festem $l \geq k+1$ schon alle charakteristischen Zyklen; 2. für $l \geq k+1$ sind je zwei Tangentenbilder von M^k in $H(k, l)$ homotop. — Die Z_χ und ΓZ_χ werden natürlich so gewählt, daß sie für die beim Schnitt mit $t(M^k)$ in Betracht kommenden Dimensionszahlen $d \geq kl - k$ eine Homologiebasis der $H(k, l)$ enthalten; das geschieht nach einer Methode von Ehresmann [Ann. Math., Princeton, II. S. 35, 396—443 (1934); J. Math. pur. appl., IX. S. 16, 69—100 (1937); dies. Zbl. 9, 329, 16, 74]. Es sei $R^1 \subset R^2 \subset \dots \subset R^{k+l}$ eine Folge von orientierten linearen Räumen der Dimensionen $1, 2, \dots, k+l$ durch O (der letzte mit der im R^{k+l} gegebenen Orientierung) und $\chi(i)$, $l \geq \chi(i) \geq 0$, eine nicht zunehmende, ganzzahlige Funktion von $i = 1, 2, \dots, k$; $R_{(i)}$ bezeichne den durch die Bedingung $\dim R_{(i)} = i + l - \chi(i)$ bestimmten Raum dieser Folge. Dann bildet die Gesamtheit der Elemente von $H(k, l)$, die $R_{(i)}$ für jedes i wenigstens i -dimens. schneiden, eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit $Z(\chi)$ in $H(k, l)$; ihre Dimension ist $d(\chi) = kl - r(\chi)$, $r(\chi) = \sum_i \chi(i)$. Die $Z(\chi)$ sind bis auf Homotopie von der Wahl der Raumfolge unabhängig. Jede nicht orientierbare $Z(\chi)$ bestimmt einen Zyklus mod 2, jede orientierbare und nach einer bestimmten Vorschrift orientierte $Z(\chi)$ einen ganzzahligen Zyklus von $H(k, l)$; wir bezeichnen die Zyklen ebenfalls mit $Z(\chi)$. Der Rand jeder nicht orientierbaren $Z(\chi)$ ist das Doppelte eines ganzzahligen Zyklus $\Gamma Z(\chi)$ der Dimension $d(\chi) - 1$. Diejenigen $Z(\chi)$ und $\Gamma Z(\chi)$ der Dimensionen $d \geq kl - k$, für die $\chi(1) < l$ ist, sind die Z_χ und ΓZ_χ , aus denen die char. Zyklen gebildet werden. Aus ihnen bildet man eine Homologiebasis der Dimensionen $d \geq kl - k$ nach der Vorschrift (sie gilt für $d \geq kl - l + 1$, und hier ist $l \geq k+1$ vorausgesetzt): Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ der Reihe nach die Anzahlen aufeinander folgender Stellen i , an denen $\chi(i)$ konstant ist, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ die Sprünge von $\chi(i)$ an den Sprungstellen. Dann und nur dann ist Z_χ orientierbar, wenn die $\alpha_v + \beta_v$ für $v = 1, 2, \dots, n-1$ alle gerade sind [hier ist die Voraussetzung $\chi(1) < l$ wesentlich]. Man bilde die Folge $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$, endend mit β_{n-1} , wenn $\chi(k) = 0$, mit α_n sonst. Wir betrachten nur Funktionen χ , deren erste Sprungstelle bei einem $i \geq 2$ liegt; diejenigen von ihnen, deren α, β -Folge nur gerade Zahlen enthält, einschl. $\chi(i) = 0$, bilden die Klasse X ; von den übrigen bilden diejenigen, in deren α, β -Folge die erste ungerade Zahl ein β ist, die Klasse X_β . Die Z_χ , $\chi \in X$, sind orientierbar, die Z_χ , $\chi' \in X_\beta$, nicht. Die Z_χ mit $\chi \in X$, $d(\chi) = d$, und die ΓZ_χ mit $\chi' \in X_\beta$, $d(\chi') - 1 = d$ bilden eine d -dimensionale (ganzzahlige) Homologiebasis; dabei sind die Z_χ freie Zyklen, die ΓZ_χ von der Ordnung 2. Um eine Homologiebasis mod 2 zu erhalten, muß man noch die $Z_{\chi''}$ mit $\chi'' \in X_\beta$, $d(\chi'') = d$ hinzunehmen. — Die X_χ für die $\chi \in X$ oder X_β , nennt Verf. char. Fundamentalzyklen. Unter ihnen sind die X_χ mit $\chi \in X$ von besonderem Interesse, weil sie die einzigen ganzzahligen char. Zyklen sind, für die nicht notwendig $2X_\chi \sim 0$. Jede (ganzzahlige) char. Zahl $\neq 0$ muß zu diesen X_χ gehören. Die Funktion $\chi(i) \equiv 1 - \text{wegen } r(\chi) \leq k \text{ die einzige, für die } \chi(k) > 0 \text{ ist} - \text{gehört zu } X \text{ dann und nur dann, wenn } k \text{ gerade ist. Ihr entspricht, da } \dim X_\chi = k - r(\chi) = 0 \text{ ist, eine char. Zahl } X_1; X_1 = 0, \text{ wenn } k \text{ ungerade. } (X_1 = \text{Eulersche Charakteristik von } M^k \text{ wird in der folgenden Arbeit bewiesen.) Für die } \chi \in X \text{ mit } \chi(k) = 0 \text{ zeigt die } \alpha, \beta\text{-Folge, daß } r(\chi) \equiv 0 \pmod{4}. \text{ Von } 0 \text{ und } X_1 \text{ verschiedene (ganzzahlige) char. Zahlen können also nur für durch 4 teilbare } k \text{ auftreten. Für } k = 4 \text{ gibt es z. B. neben } X_1 \text{ noch eine char. Zahl } X_{2,2}; \text{ dabei ist mit } X_{p,q} \text{ der char. Zyklus bezeichnet,}$

dessen χ genau eine Sprungstelle mit $\alpha_1 = p$, $\beta_1 = q$ hat. — Kehrt man die Orientierung der M_k um, so bleiben alle X_χ ungeändert bis auf die mit $\chi \in X$, $\chi \equiv 1$; diese gehen in $-X_\chi$ über. Daraus folgt: wenn M_k eine die Orientierung umkehrende, reguläre topologische Abbildung auf sich zuläßt, gilt für alle char. Zyklen $2X_\chi \sim 0$. — Wenn M^k Rand einer berandeten M^{k+1} ist, so ist X_1 gerade, alle anderen char. Zahlen (ganzzahlig und mod 2) sind 0. Ein Beispiel einer nicht berandenden M^4 ist die komplexe projektive Ebene, $X_1 = 3$. — Wenn sich M^k regulär in R^{k+1} abbilden läßt, liegt $T(M^k)$ in der k -dimens. Sphäre $H(k, 1)$, und alle char. Zyklen bis auf X_1 sind homolog 0; X_1 ist gerade. Pannwitz (Berlin).

Pontrjagin (Pontriagin), L. S.: Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten. Mat. Sbornik, n. S. 24 (66), 129—162 (1949) [Russisch].

Die Zyklen, die Stiefel bei der Untersuchung der Singularitäten von Systemen stetiger Vektorfelder in Mannigfaltigkeiten eingeführt hat [Comment. math. Helvetici 8, 305—353 (1936); dies. Zbl. 14, 416; vgl. hierzu auch Whitney, z. B. Lectures in Topology, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor 1941, S. 101—141] kommen neben anderen unter den char. Zyklen einer M^k (s. vorsteh. Referat) vor. Man kann sogar alle char. Zyklen durch die Singularitäten von Systemen von Vektorfeldern kennzeichnen, wenn man verschiedene Typen von Singularitäten unterscheidet. Das geschieht, indem man in jedem Punkt nicht nur nach dem Rang des ganzen Vektorsystems, sondern auch nach den Rängen gewisser Teilsysteme fragt. $V(x) = \{v_\mu(x)\}$, $\mu = 1, 2, \dots, m$ sei ein System von m in M^k definierten stetigen Vektorfeldern; die Reihenfolge ist wesentlich. Zur Bestimmung der Singularitätentypen dienen ganzzahlige, nicht abnehmende Funktionen $\sigma(h)$ von $h = 0, 1, \dots, k-1$; und zwar hat $V(x)$ in x eine Singularität vom Typus σ , wenn für jedes h das System der Vektoren $v_\mu(x)$, $1 \leq \mu \leq h + \sigma(h)$, höchstens vom Range h ist. Wesentlich sind diese Bedingungen nur an den Sprungstellen von $\sigma(h)$, und wenn diese alle zur Bestimmung des Typus beitragen sollen, muß für die letzte Sprungstelle h_{n-1} verlangt werden: $m \geq h_{n-1} + \sigma(h_{n-1})$. Der Zusammenhang zwischen den Singularitäten und den char. Zyklen beruht auf dem Hilfssatz: g_1, g_2, \dots, g_{k-l} seien orthogonale Einheitsvektoren des R^{k+l} , R^l der von g_1, \dots, g_l aufgespannte Raum durch O ; ferner sei $R_0^k \in H(k, l)$, und u_μ ($\mu = 1, \dots, k+l$) sei die Orthogonalprojektion von $g_{k+l+1-\mu}$ in R_0^k . σ genüge der Bedingung $\sigma(k-1) \leq l$, und es sei $\chi(i) = \sigma(k-i)$, $Z(\chi)$ die mittels der Raumfolge R^i konstruierte Pseudomannigfaltigkeit in $H(k, l)$. Dann und nur dann erfüllen die u_μ die Bedingungen für eine Singularität vom Typus σ , wenn $R_0^k \in Z(\chi)$. — M^k sei regulär in $R^{k+l'}$ eingebettet. Im Tangentenbild $T(M^k)$ entsprechen den $v_\mu(x)$ eines $V(x)$ Vektoren $u'_\mu(x)$ des dem Punkte x zugeordneten $T'_x \in H(k, l')$. Im Raume $R^{k+l'}$, $l = l' + m$, läßt sich $T'(M^k)$ in ein Bild $t(M^k)$ deformieren, so daß in jedem t_x die den $u'_\mu(x)$ entsprechenden Vektoren $u_\mu(x)$ gerade die Projektionen der $g_{k+l+1-\mu}$ ($\mu = 1, \dots, m$) sind. Mittels des Hilfssatzes folgt dann: In jeder Umgebung der (abgeschlossenen) Menge F_σ der Singularitäten des Typus σ von $V(x)$ gibt es einen Zyklus, der dem char. Zyklus X_χ , $\chi(i) = \sigma(k-i)$, homolog ist; wenn also $X_\chi \sim 0$, so hat F_σ mindestens die Dimension $k - r(\chi)$. Die Stiefschen Zyklen erhält man, wenn man $\sigma(h) = 0$ für $h < m-1$, $= 1$ für $h \geq m-1$ setzt. Ähnlich wie Stiefel zeigt Verf.: Ist K eine Triangulation von M^k , K^* die dazu duale Zellenzerlegung und X^* ein Zyklus von K^* , $X^* \sim X_\chi$, so kann man ein System von Vektorfeldern $V(x)$ in M^k konstruieren, dessen Singularitätenmenge F_σ aus dem Träger $|X^*|$ von X^* und Zellen von K^* besteht, deren Dimensionen kleiner als $k - r(\chi)$ sind. $|X^*|$ ist leer, wenn $X_\chi \sim 0$. Dabei ist, wie immer, $\chi(i) = \sigma(k-i)$. — Enthält ein Simplex E^r der Dimension $r - r(\chi)$ nur eine Singularität des Systems $V(x)$ vom Typus σ , so läßt sich mittels einer gewissen Abbildung von E^r in $H(k, l)$, $l \geq m$, eine Vielfachheit der Singularität als Schnittindex des einzigen Schnittelements des Bildes von E^r mit Z_χ definieren. Ist die Singularitätenmenge F_σ in M^k ein Polyeder $|L|$ der Dimension $k - r$, $r - r(\chi)$, so überträgt sich der Begriff der Vielfachheit auf die Simplices von $|L|$, und man kann einen Singularitätenzyklus X'_σ definieren, in dem jedes Simplex von L mit seiner Vielfachheit als Koeffizienten auftritt. Dann ist $X'_\sigma \sim X_\chi$. Im Falle eines einfachen Vektorfeldes stimmt die Vielfachheit mit dem Index der Singularität überein. Daraus folgt, daß die char. Zahl X_1 gleich der Eulerschen Charakteristik der M^k ist. — In den kritischen Punkten vom Typus p einer Abbildung f von M^k in M^m hat das System der Gradienten der Abbildungsfunktionen in den lokalen Koordinaten eine Singularität vom Typus σ , $\sigma(i) = 0$ für $i \leq p-1$, $= m-p$ für $i \geq p$. Ist M^k geschlossen und orientiert, $M^m = R^m$, so gilt: Jede Umgebung der kritischen Menge F_p enthält einen zu $X_\chi - X_{p-k, m-p}$ homologen Zyklus. Ist F_p ein Polyeder, so ist der — analog dem Singularitätenzyklus definierte — kritische Zyklus $X'_p \sim X_\chi$. — Für $m = 2k-1$, $p = k-1$ wird die char. Zahl (mod 2) $X_{1,k}$ berechnet; sie ist immer 0. Da $X_{1,k}$ kein Fundamentalzyklus ist, aber durch diese ausgedrückt werden kann, liefert $X_{1,k} = 0$ eine Relation mod 2 zwischen den ganzzahligen char. Zahlen, und zwar: für $k = 2$ Geradenheit von X_1 , für $k = 3$ nichts — alle char. Zyklen sind Stiefsche Zyklen und ~ 0 —, für $k = 4$ $X_{2,2} \equiv X_1 \pmod{2}$. Durch Zusammenheften komplexer projektiver Ebenen längs der Ränder ausgebohrter Kugeln erhält man Beispiele von M^4 mit $X_1 = a$, $X_{2,2} = b$, a und b beliebige ganze Zahlen mit $a \equiv b \pmod{2}$; $t \equiv 3 \pmod{2}$ ist die char. Zahl $X_{2,2}$ der komplexen projektiven Ebene. Pannwitz (Berlin).

Pontrjagin (Pontriagin), L. S.: Einige topologische Invarianten geschlossener Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 13, 125—162 (1949) [Russisch].

Verf. überträgt die Ergebnisse der ersten der beiden vorstehend besprochenen Arbeiten in die Sprache der alternierenden Differentialformen oder Tensorfelder, die nach E. Cartan und G. de Rham die Homologietheorie (mit Division) einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wiedergeben, wobei dem Randoperator die äußere Differentiation entspricht. Nach einem einleitenden, von V. A. Rochlin zusammengestellten Paragraphen über die Homologietheorie der Tensorfelder wird zunächst eine Homologiebasis von $H(k, l)$, $l \geq k + 1$, für Tensorfelder r -ter Stufe, $r \leq k$, aufgestellt. Da $H(k, l)$ die Gruppe G der Drehungen des R^{k+l} um O als transitive Transformationsgruppe zuläßt, kann man sich auf gegen G invariante Tensorfelder beschränken; die Aufgabe reduziert sich also auf die Untersuchung der in einem festen Element $R_0^k \in H(k, l)$ definierten Tensoren, die invariant sind gegen die Untergruppe $G_0 \subset G$, die R_0^k in sich transformiert. $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l$ seien orthogonale Einheitsvektoren in R^{k+l} , davon e_1, \dots, e_k in R_0^k . Ist U eine Umgebung von R_0^k , deren Elemente R_ξ^k bei Orthogonalprojektion eindeutig unter Erhaltung der Orientierung auf R_0^k abgebildet werden, und sind die $e'_i = e_i + \sum_{j=1}^l \xi_{ij} f_j$ ($i = 1, \dots, k$) die Vektoren von R_ξ^k , die sich auf die e_i projizieren, so kann man die ξ_{ij} als lokale Koordinaten in U benutzen. Die mit variablen Vektoren $\xi^p = \|\xi_{ij}^p\|$ ($p = 1, \dots, r$) aus U gebildeten $\xi_\alpha^p \xi_\beta^q$ ($p \neq q$; $p, q = 1, \dots, r$) verhalten sich in α, β wie die Komponenten eines Tensors 2. Stufe in R_0^k . Bei geradem k bzw. bei durch 4 teilbarem $r = 2s$ seien

$$\tilde{K}_1 = \sum_{i_1, \dots, i_k} \text{sign}(i_1, \dots, i_k) \xi_{i_1 i_2}^{12} \xi_{i_2 i_3}^{34} \dots \xi_{i_{k-1} i_k}^{k-1, k}, \quad \tilde{K}^n = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_s=1}^k \xi_{\alpha_1 \alpha_2}^{12} \xi_{\alpha_2 \alpha_3}^{34} \dots \xi_{\alpha_{s-1} \alpha_s}^{r-1, r},$$

und $K^1(\xi^1, \dots, \xi^r)$ bzw. $K^r(\xi^1, \dots, \xi^r)$ die entsprechenden, bez. aller ξ^p alternierenden Multilinearformen. Schließlich bezeichne $K^q(\xi^1, \dots, \xi^r)$ das äußere Produkt solcher Formen K^r ; q steht dabei für $\{r_1, \dots, r_t\}$, $r_1 \leq \dots \leq r_t$, $r_t \equiv 0 \pmod{4}$, $\sum_t r_t = r(q) = r$. Durch Anwen-

dung von G erhält man daraus auf $H(k, l)$ gegen G invariante Tensorfelder $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^q$, die sich bez. jedes $R^k \in H(k, l)$ in den lokalen Koordinaten ebenso ausdrücken wie bez. R_0^k . Die \mathbb{R}^q (einschl. \mathbb{R}^1 für $r = k$) bilden eine Homologiebasis der Tensorfelder k -ter Stufe von $H(k, l)$ ($r \leq k \leq l - 1$). (Zum Beweis der Unabhängigkeit der Basis muß Verf. auf die entsprechenden Untersuchungen für die Z_χ zurückgreifen.) — M^k sei regulär in R^{k+l} eingebettet, $T(M^k)$ ihr Tangentenbild. Jedes \mathbb{R}^q bestimmt ein charakteristisches Tensorfeld P^q auf M^k ; dazu hat man in der Form $K^q(\xi^1, \dots, \xi^r)$, ausgedrückt in lokalen Koordinaten der Umgebung U_x von $T_x \in H(k, l)$, Koordinaten und Vektorkomponenten mittels der Transformationsformeln durch ihre Ausdrücke in einem lokalen Koordinatensystem von $x \in M^k$ zu ersetzen. Daß die P^q von l und von der speziellen Wahl der regulären Einbettung der M^k in R^{k+l} unabhängig sind, zeigt man ähnlich wie bei den char. Zyklen. Die char. Tensorfelder lassen sich durch den Riemannschen Krümmungstensor der M^k berechnen — die Formeln werden explizite angegeben; dabei muß die durch die Einbettung bestimmte Metrik zugrunde gelegt werden. — Zwischen den char. Tensorfeldern und den char. Zyklen X_χ , $\chi \in X$ (nur diese kommen für Homologie mit Division in Frage), besteht folgender Zusammenhang: zu jedem \mathbb{R}^q bzw. P^q gibt es einen $(k(l-r))$ -dimens. Zyklus, $r = r(\chi) = r(q)$, $Z(\mathbb{R}^q) = \sum_{x \in X} a^{q, x} Z_\chi$ von $H(k, l)$ bzw. $X(P^q) = \sum_{x \in X} a^{q, x} X_\chi$ von M^k , so daß für jeden ganzzahligen r -dimens. Zyklus W von $H(k, l)$ bzw. Y von M^k gilt:

$$(1) \quad \int_W \mathbb{R}^q = I(Z(\mathbb{R}^q), W) \quad \text{bzw.} \quad (2) \quad \int_Y P^q = I(X(P^q), Y);$$

dabei bezeichnet I den Schnittindex der Zyklen. Die $a^{q, x}$ sind reelle Zahlen und bestimmen sich aus (1) zu: $a^{q, 1} = 0$, wenn $q \neq 1$; $a^{1, \chi} = 0$, wenn $\chi \equiv 1$; $a^{11} = \frac{1}{2} \sigma_k$, σ_k Flächeninhalt der k -dimens. Einheitskugel; allgemein $a^{q, x} = \frac{1}{2} \int_{Z_\chi} \mathbb{R}^q$, wobei $\bar{\chi}(i) = l - \chi(k - i + 1)$. Für P^1 und $Y = M^k$ ergibt sich hieraus die bekannte Verallgemeinerung der Gauß-Bonnetschen Formel: $\int_{M^k} P^1 = a_{11} I(X_1, M^k) = \frac{1}{2} \sigma_k X_1$, X_1 die Eulersche Charakteristik von M^k (s. vorsteh.

Referat). Wie weit die $a^{q, x}$ durch (2) bestimmt sind, bleibt offen, da man nicht weiß, ob zwischen den X_χ Relationen bestehen.

Pannwitz (Berlin).

Fáry, István: Remarque sur le prolongement des transformations topologiques. Publ. math., Debrecen 1, 109—115 (1949).

S désigne dans l'espace euclidien E_3 une surface homéomorphe à une sphère,

D le domaine borné limité par S , D' le domaine non borné limité par S . Des conditions ont été données par J. W. Alexander [Proc. nat. Acad. Sci. USA **10**, 6—8 et 8—10 (1924)] pour que $S \cup D$ soit homéomorphe à une boule fermée. Théorème I: Si en tout point de S le paratingent laisse échapper une direction, $S \cup D$ est homéomorphe à une boule fermée, $S \cup D'$ est homéomorphe au complémentaire d'une boule ouverte. Les idées directrices de la démonstration sont les suivantes: Imprimer à S un nombre fini de modifications n'altérant pas topologiquement $S \cup D$ de manière à obtenir une surface fermée \tilde{S} , somme d'un nombre fini de surfaces convexes, à laquelle s'applique le critère d'Alexander. Transformer S par une inversion ayant son pôle dans D . Théorème II: Dans les conditions du Th. I, toute transformation topologique de S sur la sphère S' peut être prolongée en une transformation topologique de E_3 en lui-même. L'A. envisage la possibilité de prouver l'homéomorphisme d'un domaine D de E_n dont tous les groupes d'homotopie se réduisent à un seul élément, avec une boule ouverte B_n en métrisant D de manière que les géodésiques soient globalement uniques; comme tentative dans ce sens il considère la surface Z de E_{n+1} représentant la fonction f définie sur D et égale en x à l'inverse de la distance de x à la frontière S de D et pose $\delta(x', x'') =$ distance géodésique sur Z entre $z' = (x', f(x'))$ et $z'' = (x'', f(x''))$. Remarques: (R 1) La transformation Φ qui intervient dans la démonstration du lemme § 8, p. 113 est une automorphie de la boule fermée $B = B \cup S'$ et non (seulement) de la boule ouverte B ; (R 2) L'étude des δ -géodésiques dans D correspond à un problème régulier (selon Menger) du Calcul des Variations. En effet le contingent de Z en un point $z = (x, f(x))$ est un cône convexe C ouvert vers les x_{n+1} positifs [cf. PAUC, Actual. sci. industr. No. 885, Paris 1941, p. 41—43] et l'indicatrice en x du problème est la projection sur E_n de l'intersection de C avec la sphère unitaire de E_{n+1} de centre z . Chr. PAUC (Le Cap).

Klassische theoretische Physik.

Elastizität. Plastizität:

Carrier, G. F.: On the buckling of elastic rings. J. Math. Phys., Massachusetts **26**, 94—103 (1947).

The au. treats four problems in the equilibrium of thin elastic rings: (1) Stability of a closed ring (not necessarily circular) under static loads. The load distribution — normal and tangent to the axis of cross-sections — is such that no bending of the ring occurs before the occurrence of instability. (2) The deformed shape of a buckled, originally circular ring under steady uniform pressure that remains normal to the axis of cross-sections. (3) Stability of an originally circular ring under static loads that produce large deflections. A second system of loads is found that will cause no additional deformation in the prestressed system (axial change of length excluded); a measure of the stability of the system is the factor by which this second system must be multiplied to give instability. (4) Stability of a circular ring subjected to uniform radial pressure whose intensity varies periodically with time.

M. P. White (Amherst/Mass.).

Arutjunjan, N. Ch.: Lösung des Problems der Torsion von Stäben mit prismatischem Querschnitt. Priklad. Mat. Mech., Moskva **13**, 107—112 (1949) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird eine exakte Lösung des Torsionsproblems für prismatische Stäbe von polygonalem Querschnitt versucht, indem für die Spannungsfunktion U im Falle des gleichschenkligen Winkeleisens der Schenkelweite b und Schenkeldicke d ein Reihenansatz

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d} + \Phi(x, y)$$

gemacht wird. Die Anpassung an die vorgeschriebenen Randbedingungen liefert dann unter Beachtung der bekannten Differentialgleichung $\Delta U + 2 = 0$ sowohl für $f_k(x)$, als auch für die in weiterer Folge für die Restfunktion $\Phi(x, y)$ entwickelte Reihe Schranken, die ihre numerische Berechnung gestatten. Auch die Spannungsfunktion $U(x, y)$ und die gesamte Drehsteifigkeit D läßt sich so in Schranken eingrenzen: $D^+ = D^0 L^+$; $D^- = D^0 L^-$. D^0 ist dabei die Summe der Drehsteifigkeiten der einzelnen Rechtecke, aus denen sich das Profil zusammensetzen läßt, während die Faktoren L^+ bzw. L^- Schranken des „Vergrößerungsfaktors“ darstellen, die den Einfluß der „Stoßfugen“ zum Ausdruck bringen und für die für verschiedene Werte des Verhältnisses $\beta = b/d$ in einer Tabelle Zahlenwerte angegeben werden. — Analoges gilt für die Schubspannung τ_{xz} und den Größtwert τ_{\max} , der sich übrigens für verschiedene Werte von β ebenfalls nahezu in der Mitte der Schenkellänge b einstellt.

Karas (Darmstadt).

Aquaro, Giovanni: Sul calcolo delle deformazioni di uno strato sferico elastico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 7, 289—297 (1950).

Let D be an elastic isotropic body, that in its natural state occupies the points of 3-dimensional space defined by the conditions $r \leq \overline{OP} \leq R$, where $r < R$ are non negative numbers, O a fixed point, \overline{OP} the distance between O and P . — A complete and orthogonal set of vectors is introduced, whose components are defined on the surface of the unit sphere, and is shown to have, in connection with the equations of elastic equilibrium, the analogous properties, that spherical harmonics have in the theory of Laplace equation. — The employ of this system permits a very simple and straightforward resolution of equilibrium problems for D as well as spherical harmonics permit resolution of boundary values problems for Laplace equation in a spherical layer.

Gaetano Fichera (Roma).

Petrašeñ, G.: Das zweidimensionale Lambsche Problem für eine unendliche elastische Schicht, die von zwei parallelen Ebenen begrenzt wird. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 783—786 (1949) [Russisch].

Die Oberfläche $z = h$ eines zweidimensionalen isotropen elastischen Streifens sei spannungsfrei, während auf die Oberfläche $z = 0$ eine örtlich und zeitlich punktförmige Beanspruchung ausgeübt wird. Der Verschiebungsvektor $u = (u, v)$ wird angesetzt in der Form: $u = \varphi_x - \psi_z$, $w = \varphi_z + \psi_x$, wobei die Potentiale φ und ψ als Fourierintegrale, z. B. $\varphi = \frac{2}{\pi b \mu} \cdot \int_0^\infty X(z, t, k) \cdot \frac{\cos kx}{k} dk$, $b =$ Longitudinalwellengeschwindigkeit, geschrieben werden mit Funktionen X und Y , die sich mit Hilfe der Umkehrformel der Fouriertransformation aus den Randbedingungen ergeben als

$$X = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(z, k, \zeta) \cdot \frac{\exp(k \pm \zeta/b)}{\Delta_0(k, \zeta)} d\zeta,$$

Y entsprechend, mit Radikal- und trigonometrischen Ausdrücken in den Funktionen F_1 , F_2 und Δ_0 . Bei Entwicklung der trigonometrischen Funktionen können die Integranden in X und Y auch als gleichmäßig konvergente Doppelreihen geschrieben werden mit hypergeometrischen Funktionen von ζ als Entwicklungskoeffizienten. — Die Diskussion der Nullstellen von Δ_0 und entsprechende Verschiebung des Integrationsweges über die Pole führt zu einer Darstellung $X = X_0 + X_R + X_\lambda$, Y entsprechend, wo X_0 dem Pol bei $\zeta = 0$, X_R den übrigen Residuen und X_λ dem Restintegral entsprechen. Die Bestandteile X_0 und Y_0 liefern $u \equiv 0$, so daß wird: $u = u_R + u_\lambda$. — Für $h \rightarrow \infty$ geht u_R über in die bekannte Rayleigh-Welle für den Halbraum. Für endliches h ist dagegen u_R vom Charakter einer gedämpften Schwingung, deren Amplitude logarithmisch abklingt. Die zugehörige Energie klingt in Punkten mit kleinem z noch langsamer ab. — Die Berechnung von u_λ ist sehr mühsam. Für große h führt die Anwendung der obigen Doppel-

reihe zur Zerlegung von u_λ in $u_\lambda^0 + u_{e\lambda}$, wo $u_{e\lambda}$ eine überall stetige Welle ist, die mindestens wie $1/t$ abklingt; u_λ^0 dagegen hat die reflektierten Longitudinal- und Schubwellen als Unstetigkeitslinien. Für die Sprunghöhen können Abschätzungen gegeben werden: die Energie der reflektierten Wellen ist von der Größenordnung $1/t$, klingt also schneller ab als die Rayleigh-Welle. *H. Richter* (Haltingen/Baden).

Sauter, Fritz: Der flüssige Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche. (Zweidimensionales Problem.) *Z. angew. Math. Mech.* **30**, 149—153 (1950).

Betrachtet wird der von der Ebene $z = 0$ begrenzte, von ursprünglich ruhender Flüssigkeit erfüllte Halbraum, der von einem bestimmten Zeitpunkt an unter der Wirkung eines zusätzlichen, nur von einer Koordinate abhängigen Druckes $p(x, y, 0, t) = q(x, t)$ auf die Oberfläche stehen soll. Unter Vernachlässigung von Schwerkraft, innerer Reibung und Oberflächenspannung wird die Störbewegung als so klein vorausgesetzt, daß für das Geschwindigkeitspotential $\Phi(x, z, t)$ die Wellengleichung $\Delta\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ ausreicht (akustische Näherung). Verf. beweist die Lösungsformel

$$\Phi(x, z, t) = -\frac{z}{\pi \varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{(x-x')^2 + z^2} \int_{-\infty}^{t - c^{-1} \sqrt{(x-x')^2 + z^2}} \frac{c(t-t') \cdot q(x', t') dt'}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - (x-x')^2 - z^2}} \quad (\varrho \text{ Dichte})$$

und diskutiert sie hinsichtlich der Bewegung auf der Oberfläche und im Innern. Die Arbeit ist als Vorstudie zum Problem der mechanischen Beeinflussung eines elastischen Halbraumes gedacht.

Maruhn (Dresden).

Gol'denblat, I. I.: Über ein Problem der Mechanik der endlichen Deformationen von dichten Medien. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **70**, 973—976 (1950) [Russisch].

In sinngemäßer Verallgemeinerung der Bezeichnungen in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **35**, 410) seien I_ν die Invarianten des gewöhnlichen Verzerrungstensors ε_{ik} und T_ν die des Spannungstensors σ_{ik} . Es ist dann für isotherme Vorgänge in isotropem Material: (1) $\sigma_{ik} = \psi_0 g_{ik} + \psi_1 \varepsilon_{ik} + \psi_2 \varepsilon_{i\alpha} \varepsilon_{\alpha k}$, wo die ψ_ν Funktionen der I_ν , resp. T_ν , sind. Da sich die ψ_ν als Ausdrücke in den partiellen ersten Ableitungen der freien Energie F nach den I_ν ergeben, lassen sich Integrabilitätsbedingungen bilden, die angegeben werden. Mit Hilfe von (1) und der allgemeinen Reduktionsformel für die Invariante der Ordnung 4 auf die der Ordnungen 1—3 können die ψ_ν auch in die Form (2): $\psi_\nu = \sum \Phi_{\nu k} T_k$ gebracht werden mit $\Phi_{\nu k} = \Phi_{\nu k}(I_1, I_2, I_3)$. Wenn nun Experimente angestellt wurden, die von zwei unabhängigen Parametern a und b abhängen, können $I_\nu(a, b)$, $T_\nu(a, b)$ experimentell ermittelt, die $\psi_\nu(a, b)$ aus (2) bestimmt und durch Interpolation der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang im ganzen durch a und b definierten zweidimensionalen Deformationsbereich gefunden werden, ohne daß eine Differentiation nötig wäre, die große Ungenauigkeit mit sich bringt. — Angabe eines einfachen, allerdings nur theoretischen Beispiels.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Ševčenko, K. N.: Der elasto-plastische Zustand unter einer konzentrierten Kraft, die an einer Halbebene angreift. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **61**, 29—30 (1948) [Russisch].

Auszug aus dem 1. Teil der Arbeit in *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva **12**, 385—388 (1948); dies. Zbl. **30**, 226.

Richter (Haltingen/Baden).

Savin, G. N. und O. S. Parasjuk: Über einige elasto-plastische Probleme mit linearen Verfestigungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **70**, 585—588 (1950) [Russisch].

Zwischen den Dehnungen e_{xx}, \dots und den Spannungen σ_x, \dots mögen bei ebenem Deformationszustand die Henckyschen Gleichungen gelten

$$(1) \quad e_{xx} = \psi \cdot (\sigma_x - \sigma) / 2G, \dots, e_{zz} = 0, \sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 = \sigma$$

mit $\psi = (1 - \mu k/S)/n$, wo S die Spannungsintensität ist; Material mit linearer Verfestigung. Zu befriedigen sind dann die Verträglichkeitsbedingung

$$(2) \quad \partial^2 e_{xx}/\partial y^2 + \partial^2 e_{yy}/\partial x^2 = 2 \partial^2 e_{xy}/\partial x \partial y$$

und die Gleichgewichtsbedingungen (3): $\partial \sigma_x/\partial x + \partial \tau_{xy}/\partial y = 0$, $\partial \tau_{xy}/\partial x + \partial \sigma_y/\partial y = 0$. Gesucht werden Lösungen von (1–3), welche gleichzeitig Lösungen für ebene rein elastische Deformationen sind und daher (4): $\Delta \sigma = 0$ befriedigen. Der Ansatz

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \omega(x, y) \mp K(x, y) \cos \varphi(x, y), \quad \tau_{xy} = K(x, y) \sin \varphi(x, y)$$

führt zum Gleichungssystem (5): $\Delta \omega = 0$, (6): $\Omega(K \cos \varphi) = -2 \partial^2 K \sin \varphi / \partial x \partial y$, $\Omega(K \sin \varphi) = 2 \partial^2 K \cos \varphi / \partial x \partial y$ mit $\Omega = \partial^2 / \partial y^2 - \partial^2 / \partial x^2$ und (7) $\Omega \cos \varphi = -2 \partial^2 \sin \varphi / \partial x \partial y$. — Fordert man zu (6) und (7) zusätzlich (8) $\Omega \sin \varphi = 2 \partial^2 \cos \varphi / \partial x \partial y$, so lautet die allgemeine Lösung

$$\varphi = -2 \arctg(y/x) - 2\alpha \quad \text{mit} \quad K = c + (ny - mx + a/2)/(x^2 + y^2)$$

bei reellen Konstanten α, a, m, n, c . Die Linie $K = k$ ist die Grenze zwischen elastischem und plastischem Bereich. — Für $a = \alpha = c = 0$ ergibt sich die Lösung von Ševčenko (dies. Zbl. 30, 226) über die Wirkung einer punktförmigen Kraft, bei $m = n = c = 0$ dagegen die Lösung für die Wirkung eines Kräftepaares auf eine Halbebene. — Ersetzt man (8) durch die Forderung (9): $\Delta \varphi = 0$, so ist die Verträglichkeitsbedingung für K identisch erfüllt, so daß das System (7) und (9) für φ zu lösen ist. Setzt man $x + iy = z$ und $\varphi + i\psi = w$, wo ψ eine zu φ konjugierte Potentialfunktion ist, so lautet die allgemeine Lösung

$$dz = e^{-i w/2} dw / \sqrt{-i(a w + b_1 + i b_2)};$$

hierzu gehört $K = e^{-\psi} \cdot (ny - mx - a/2)$. Für $a \rightarrow 0$, $\alpha = 0$ geht diese Lösung über in die bei Vorgabe eines kreisförmigen Loches mit konstantem Normaldruck.

H. Richter (Haltingen/Baden).

Fusfeld, Herbert I.: New interpretation of the n -power law in plastic deformation. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 20, 1052—1055 (1949).

Die wahre Spannungs-Dehnungskurve für den einfachen Zugversuch sei gegeben als Abhängigkeit der wahren, d. h. auf den momentanen Querschnitt A bezogenen Spannung S von der logarithmischen Dehnung $\delta = \ln(L/L_0)$, wo L die momentane Stablänge ist. In Übereinstimmung mit Experimenten kann bei vielen Metallen angesetzt werden (1): $S = k \cdot \delta^n$, wo n der Verfestigungskoeffizient heißt. Die scheinbare, d. h. auf den Ausgangsquerschnitt A_0 bezogene Spannung S' ist dann wegen der Inkompressibilitätsbedingung $A = A_0 \cdot e^{-\delta}$ gegeben durch: $S' = k \cdot \delta^n \cdot e^{-\delta}$. Die kritische scheinbare Spannung S'_0 mit $dS'/d\delta = 0$ wird damit erreicht bei $\delta_c = n$, und es ist $S'_0 = k(n/e)^n$. — An Stelle von (1) kann daher auch geschrieben werden (2): $S/S'_0 = (e \delta/n)^n$. — Die wahre Spannung ist gleich der scheinbaren kritischen Spannung S'_0 bei der Dehnung $\delta_0 = n/e$. Die allgemeine Relation $\delta_c/\delta_0 = e$ ist damit ein notwendiges Kriterium für Anwendbarkeit des n -Potenz-Gesetzes auf das betrachtete Material. — Kurven konstanter Werte von δ in einem $n - S/S'_0$ -Diagramm wurden gezeichnet und vorhandene Meßwerte mit guter Übereinstimmung eingetragen. — Bei Verfestigung durch Vordehnung einer Probe auf den Wert $\delta_1 < \delta_c = n$ wird wegen Bezugnahme auf die neue Ausgangslänge δ_c auf $\delta'_c = \delta_c - \delta_1$ und damit unter Voraussetzung der Gültigkeit des Potenzgesetzes auch für das vorgedehnte Material n auf $n - \delta_1$ erniedrigt. Wegen der Bezugnahme auf den neuen Ausgangsquerschnitt wird dabei auch S'_0 geändert; die gegenteilige Meinung des Verf. und die daran anschließenden Bemerkungen sind daher Ref. nicht verständlich.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Šatašvili, S. Ch.: Über stehende Schwingungen bei vorgegebenen Verschiebungen auf der Oberfläche eines elastischen Körpers. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 249—252 (1950) [Russisch].

Auf der Oberfläche S mit den Punkten $Q = (\xi, \eta, \zeta)$ eines endlichen elastischen Körpers seien periodische Verschiebungen mit der Frequenz λ und dem Amplitudenvektor $\mathfrak{f}(Q)$ vorgegeben. Das Longitudinalwellenpotential $\vec{\Phi}(x, y, z)$ und das Schubwellen-Vektorpotential $\vec{\Psi}(x, y, z)$ genügen dann den Differentialgleichungen (1): $\Delta\Phi + k_1^2\Phi = 0$, $\Delta\vec{\Psi} + k_2^2\vec{\Psi} = 0$ mit $k_1^2 = \lambda^2/a$, $k_2^2 = \lambda^2/b$; a und b sind dabei Longitudinal- und Schubwellengeschwindigkeit. Sei \mathbf{n} die Innennormale von S im Punkte Q , $f_\nu(R) = R^{-1} \exp(-i k_\nu R)$ mit

$R = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 + (x_3 - \zeta)^2}$, $A = 2/(k_1^2 + k_2^2)$ und $B = (k_2^2 - k_1^2)/(k_1^2 + k_2^2)$, so stellen die Komponenten von $\mathfrak{H} = -A \partial \text{grad } f_1 / \partial n + B f_1 \cdot \mathbf{n}$ die Elementarquell-Lösungen von (1) mit Quellstörung in Q für Φ und die Vektoren

$$\mathfrak{R}_\nu = A \mathbf{n} \times (\text{grad } f_2)_{x_\nu} - B f_2 \mathbf{n} \times \mathbf{r}_{x_\nu}, \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3),$$

entsprechend die von $\vec{\Psi}$ dar. Die Lösung von (1) wird nun angesetzt in der Gestalt (2):

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \mathfrak{H} \cdot \vec{\mu} dS, \quad \vec{\Psi} = \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \sum_\nu \mathfrak{R}_\nu \mu_\nu dS$$

mit der Quellstärke $\vec{\mu}(Q) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Die Randbedingung

$$\lim_{P \rightarrow Q} (\text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}) = \mathfrak{f}(Q)$$

liefert dann drei Fredholmsche Integralgleichungen für die μ_ν , wobei die Resolvente eine meromorphe Funktion von λ ist, die bei $\lambda = 0$ endlich bleibt; $\lambda = 0$ entspricht dem statischen Falle. Mit Hilfe eines Theorems von T. Tamarkin [Ann. Math., Princeton, II. S. 28, 127—152 (1927)] wird geschlossen, daß das gefundene Integralgleichungssystem für fast alle λ lösbar ist. — Da die Elementarquell-Lösungen die Ausstrahlungsbedingung erfüllen, kann die angegebene Methode auch im Falle der entsprechenden Aufgabe für den Außenbereich von S verwendet werden.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Wuest, W.: Die Biegeschwingungen eingespannter gekrümmter Stäbe und Rohre. Ingenieur-Arch. 17, 265—272 (1949).

In der vorliegenden Arbeit werden kreisförmig gekrümmte Stäbe oder Rohre betrachtet, wie sie z. B. als Bourdonrohre mit ovalem Querschnitt in der Druckmeßtechnik verwandt werden, deren Eigenschwingzahlen vor allem zur Vermeidung von Resonanzschwingungen interessieren. Der Möglichkeit der Querschnittsverformung bei geringer Wandstärke wird durch ein abgemindertes Querschnittsflächen-Trägheitsmoment $I_{\text{eff}} = \beta J_0$ Rechnung getragen, wobei der Abminderungsfaktor β für die gebräuchlichen Querschnittsformen vom Verf. in einer früheren Arbeit [Technik 3, 23 (1948)] angegeben worden ist. Aus den Gleichgewichtsbedingungen eines Federelementes in normaler und tangentieller Richtung gewinnt Verf. für die Tangentialverschiebung v bezüglich des Zentriwinkels φ eine Differentialgleichung 6. Ordnung, sofern die Dehnung der Stabachse vernachlässigt wird, was bei einseitiger Einspannung zulässig ist. Sie wird nun einmal für den Fall einer masselosen Feder mit einer Punktmasse am freien Federende, dann aber für eine gleichmäßig mit Masse belegte Feder unter Beachtung der Randbedingungen am Einspannende (Verschwinden unter Radial- und Tangentialverschiebung und deren Ableitungen) und am freien Ende (Tangential- und Radialkraft sind gleich den Trägheitskräften der Punktmasse bzw. verschwinden samt dem in beiden Fällen verschwindenden Endmoment) ausgewertet. Im ersteren Falle ergeben sich eine langsamere Haupt- und eine schnellere (rasch abklingende) Nebenschwingung, im letzteren sechs Schwingungen, deren Frequenzen in Tabellenform und graphisch dargestellt werden. Charakteristisch ist hierbei das Auftreten von drei Lösungsbereichen, die sich hinsichtlich der Realität der Wurzeln der Frequenzgleichung unterscheiden und vom

Verf. getrennt behandelt werden. Die praktische Durchführung der Rechnung empfiehlt übrigens einen zum gewöhnlichen umgekehrten Vorgang, in dem also zu gewählten Frequenzen der zugehörige Zentriwinkel φ_0 der ganzen krummen Feder bestimmt wird, wobei allerdings den Werten $\varphi_0 > 2\pi$ kaum eine praktische Bedeutung zukommt.

Karas (Darmstadt).

Sokolovskij, V. V.: Ausbreitung zylindrischer Verschiebungswellen in einem elastisch-zäh-plastischen Mittel. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 1325—1328 (1948) [Russisch].

In einem Material, welches Spannungsrelaxation, aber keine Verfestigung besitzt, nehme das Stoffgesetz für zylindersymmetrische Schubwellen mit der Schubverzerrung $\gamma(r, t)$ und der Schubspannung $\tau(r, t)$ die Form an (1): $G \cdot \gamma_t = \tau_t$ für $|\tau| \leq \tau_s$ und $G \cdot \gamma_t = \tau_t + \text{sign } \tau \cdot k \cdot (|\tau| - \tau_s)$ für $|\tau| \geq \tau_s$, wo τ_s die Fließgrenze bei Schubbeanspruchung ist; G = Schubmodul, k eine die Zähigkeit charakterisierende Konstante. Zusammen mit der Bewegungsgleichung: $\tau_r + 2\tau/r = \rho \cdot u_{tt}$, ρ = Dichte, und der geometrischen Beziehung $\gamma = u_r - u/r$ zwischen γ und der Tangentialverschiebung $u(r, t)$ liefert (1) ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem für γ, τ und $v = u_t$ mit den Charakteristiken $r \pm ct = \text{const}$ bei $c^2 = G/\rho$. An Stoßfronten gelten die rein elastischen Beziehungen; insbesondere ist bei einer in entspanntes Material laufenden Stoßfront (2): $\tau/G = -v/c - \gamma$. — Es mögen die Wellen erzeugt werden durch eine sprunghaft beginnende und anschließend stetige Drehung eines starren Zylinders vom Radius r_0 . Die Intensität τ des längs $r = r_0 + ct$ fortschreitenden Wellenkopfes bestimmt sich dann aus der Charakteristikenbeziehung und (2) in geschlossener Form: τ nimmt monoton ab und erreicht den Wert τ_s in angebbarer Entfernung r^* . Für $ct > r - r_0$ wird die Lösung dann numerisch durch Charakteristikenintegration im Anschluß an die bekannten Werte auf $r = r_0 + ct$ gewonnen. — Durchgerechnet ist der Fall der Vorgabe von τ auf $r = r_0$ in der Gestalt: $\tau = \tau_0 \cdot (1 - t/t_1)$ für $0 \leq t \leq t_1$ mit $\tau_0 > \tau_s$. Im $r-t$ -Diagramm ist der Bereich der plastischen Deformation das Dreieck zwischen den Geraden $r = r_0 + ct$, $r = r_0$ und einer zum Punkte $r = r_0$, $t = 0$ konvexen Kurve zwischen dem Punkte $r = r^*$, $t = (r^* - r_0)/c$ und dem Punkte $r = r_0$, $t = t_1 \cdot (1 - \tau_s/\tau_0)$. Für den Fall $r_0 = c/k$, $t_1 = 2/k$, $\tau_0 = 2\tau_s$ sind in einem Diagramm die Linien konstanter Werte von τ und v und in einer Tabelle die Größe der bleibenden Deformation in $r_0 \leq r \leq r^*$ angegeben.

Richter (Haltingen).

Sokolovskij, V. V.: Ausbreitung elastisch-zäh-plastischer Wellen in Stäben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 775—778 (1948) [Russisch].

Auszug aus Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 261—280 (1948); dies. Zbl. 30, 180.

H. Richter (Haltingen/Baden).

Caffyn, J. E.: Further experimental evidence for the theory of quasiproperties. Nature, London 162, 368—369 (1948).

Hydrodynamik:

● **Kirpičev, M. V. und P. K. Konakov:** Die mathematischen Grundlagen der Theorie der Ähnlichkeit. (Akad. Nauk SSSR, Energet. Inst. G. M. Kržižanovskij.) Moskau-Leningrad: Verlag der Akad. d. Wiss. d. UdSSR 1949. 103 S. R. 4.— [Russisch].

Les AA. se proposent d'exposer, d'une manière, à la fois, élémentaire et rationnelle, la théorie de la similitude. Mais pour faciliter la tâche d'un lecteur néophyte, ils consacrent une introduction importante (28 pages) à la démonstration rapide de quelques résultats de physique mathématique et d'analyse, d'un fréquent usage dans le corps de l'ouvrage. — Au chap. I, les AA. présentent quelques équations fondamentales de l'énergétique des milieux continus: équations d'état, équation de continuité, équations de Navier pour les fluides visqueux, complétées par l'équation de la conservation de l'énergie; celle-ci est d'ailleurs présentée sous les formes les plus variées et appliquée à des cas particuliers les plus divers. — Le lecteur a ainsi les équations indéfinies de plusieurs problèmes de physique mathématique; au chap. II, les AA. introduisent les conditions aux limites propres à déterminer une solution particulière (tant

pour les régimes stationnaires que non permanents) et donnent rapidement (sans chercher à atteindre une rigueur superflue dans un exposé de cette nature) divers énoncés d'unicité. Ils notent alors l'impuissance de l'analyse à fournir les expressions explicites des inconnues; l'importance de la théorie de la similitude (c'est-à-dire des modèles réduits) est pleinement mise en lumière à cette occasion. — Le chap. III est consacré à l'exposition du premier théorème de Lie dans la théorie des groupes continus de transformation et de sa réciproque; quelques notions sur les invariants de ces groupes et les applications au groupe des similitudes complètent l'exposé, dont les conclusions seront utilisées pour la démonstration des résultats fondamentaux. — Nous en venons aux théorèmes de base de la théorie qui nous occupe (chap. 4—5—6—7: 40 pages). En premier lieu (chap. IV) vient le théorème des fonctions homogènes généralisées de Mme. Afanassjewa-Ehrenfest; on a ainsi les conditions nécessaires, exprimées en invariants, dits de similitude, pour assurer la similitude des phénomènes. Ce résultat, aujourd'hui classique, est donné sans démonstration, mais il est illustré par la discussion des conditions de similitude de deux écoulements de fluides visqueux. — Au chap. V, les AA. exposent le second théorème de similitude, le plus souvent employé, dit théorème des II ; ce résultat, énoncé pour le cas des équations finies, est présenté ici comme un simple corollaire d'une ancienne proposition de Federmann [Izvestija Inst. Polytech. Saint-Petersbourg 16, fasc. II (1911)], utilisée également par Mme. Afanassjewa-Ehrenfest en vue des extensions dont les AA. contestent la validité. — Il est à noter que les physiciens appliquent constamment le théorème des II aux phénomènes régis par les équations aux dérivées partielles les plus variées, auxquelles la proposition en cause n'a pas encore pu être étendue en toute généralité. C'est pourquoi il faut souligner l'intérêt des travaux de l'un des AA. du présent ouvrage [Konakov, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Sér. Sci. techn. 1949, fasc. 2], résumés à la fin du chapitre et aboutissant à une généralisation de la règle aux systèmes différentiels. Du reste, au chapitre VI, les conclusions sont étendues à certains types d'équations aux dérivées partielles, par un procédé différent. — Voici, enfin, le troisième théorème, dû à l'un des AA. (Kirpichev) et qui ne semble pas encore être devenu classique. Au chap. VII, les AA. énoncent et démontrent cette proposition qui fournit les conditions suffisantes de la similitude pour les phénomènes régis par les systèmes différentiels; faute de place, nous ne pouvons préciser. — Les deux derniers chapitres (36 pages) illustrent les applications de la méthode à divers problèmes de la technique. Il s'agit là de contributions originales et qui semblent importantes, l'instrument de ces recherches étant le théorème de Kirpichev. — Au chap. VIII sont étudiées les diverses similitudes des écoulements des fluides visqueux tant compressibles qu'incompressibles, tant laminaires que turbulents; l'hydraulicien et le physicien y trouveront d'utiles renseignements. — Enfin, l'ouvrage se termine (chap. IX) par le résumé des recherches de Konakov [Izvestija Akad. Nauk SSSR, 1945, fasc. 9] consacrées au fonctionnement des machines thermiques: seul un technicien pourrait discuter avec autorité les conclusions des AA. en une manière où la complexité du phénomène étudié rend difficile la mise en oeuvre des méthodes de l'analyse mathématique. — Tel quel, ce petit fascicule semble destiné à rendre de grands services.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Tzénoff, Iv.: Sur la déformation d'un élément infiniment petit d'un système matériel continu. C. r. Acad. Bulgare Sci. 1, Nr. 1, 17—20 (1948).

Für den Unterschied der Geschwindigkeitsvektoren in einem kontinuierlichen Medium in zwei um den Vektor (X, Y, Z) getrennten Punkten gilt die Formel $W' - W = \Omega \times MM' + \frac{1}{2} \text{Grad } F$, wo Ω der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist und F eine quadratische Form der Variablen X, Y, Z . Die Koeffizienten dieser Form werden kinematisch gedeutet.

Hamel (Landshut).

Gião, Antonio: Le problème général aux limites pour les fonctions continues spatio-temporelles et les équations intégrales de l'hydrodynamique. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1275—1276 (1949).

Ein Gleichungssystem der Form $\epsilon V^m / \partial t - K \Delta V^m - A^m(x_1, x_2, x_3, t)$, wo K eine Konstante, Δ den Laplaceschen Operator bedeutet, kann vermöge der bekannten Lösung der homogenen Gleichung in Exponentialform durch Integrale über den Rand gelöst werden, wenn die entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen gegeben sind. Die hydrodynamischen Gleichungen gehören dazu. Allerdings müssen auf dem Rand erste und zweite Ableitungen nach der Normalen gegeben sein.

Hamel (Landshut).

Souriau, Jean-Marie et Jérôme Chastenot de Géry: Extension de la méthode de Küssner aux profils épais. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1828—1830 (1950).

Verf. untersucht die ebene Strömung einer homogenen inkompressiblen reibungsfreien Flüssigkeit um ein Profil beliebiger Dicke, das kleinen Schwingungen

um eine Ruhelage unterworfen ist. Unter φ_0, ψ_0 Potential und Stromfunktion der stationären Strömung in der Ruhelage verstanden, wird die Ebene x, y der gestörten Bewegung auf die Ebene φ_0, ψ_0 konform abgebildet; die Ruhelage des gegebenen Profils geht hierbei in ein Streckenprofil über. Nach Formulierung der neuen Randbedingungen gelangt man so zu einer entsprechenden Aufgabe für dünne Profile, deren Lösung im Prinzip (Küssner) bekannt ist. *Maruhn* (Dresden).

Lukomskaja, M. A.: Lösung gewisser Aufgaben über das Hinfließen einer Flüssigkeit zu einer Senke. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva **11**, 621—628 (1947) [Russisch].

Verf. löst mit der Methode der Singularitätenspiegelung die für die Theorie der Erdölfiltration wichtigen Randwertprobleme: 1. Gesucht ist eine Stromfunktion $w_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y)$ in der oberen z -Halbebene und eine Stromfunktion $w_2(z) = \varphi_2(x, y) + i\psi_2(x, y)$ in der unteren z -Halbebene, wenn längs der reellen Achse die Randbedingungen $\psi_1 = \psi_2$ und $\varphi_1 : c_1 = \varphi_2 : c_2$ (c_1, c_2 Konstante) vorgeschrieben sind und in der oberen z -Halbebene eine Quelle von bekannter Ergiebigkeit angenommen wird. 2. Gesucht sind die komplexen Stromfunktionen $w_1(z), w_2(z), w(z)$ für drei Gebiete G_1, G_2 und G der z -Ebene, wenn an den gemeinsamen Rändern je zweier Gebiete für die Real- und Imaginärteile der entsprechenden Stromfunktionen dieselben Randbedingungen wie zuvor vorgeschrieben sind und a) G_1 die Halbebene $\text{Im}(z) > 0$, G_2 die Halbebene $\text{Im}(z) < -h$ und G den Streifen $-h < \text{Im}(z) < 0$ bedeutet, der außerdem eine Quelle von bekannter Ergiebigkeit enthält, b) G_1 ein Kreisgebiet, das eine Quelle von bekannter Ergiebigkeit enthält, G_2 ein von G_1 getrennt liegendes Kreisgebiet und G das gemeinsame Außengebiet von G_1 und G_2 bedeutet. *Schubert* (Rostock).

Kampé de Fériet, J.: Remarques sur les fonctions orthogonales à toute fonction harmonique dans un domaine plan, à propos des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible. *Ann. Soc. sci., Bruxelles, I. Sér.* **62**, 11—18 (1948).

Weber, C.: Zur hydrodynamischen Schmiertheorie des Zapfenlagers. *Z. angew. Math. Mech.* **30**, 112—120 (1950).

Verf. gibt eine angenäherte Lösungsmethode für die Druckfunktion des endlichen Zapfenlagers bei konstanter Zähigkeit. Die Näherungsfunktion wird als Produkt einer Funktion von ψ (in Laufrichtung) und einer Funktion von φ (in Achsrichtung des Zapfens) gewählt und mit Hilfe des der Reynoldsschen Differentialgleichung entsprechenden Variationsproblems die optimale Näherung der Druckfunktion gefunden. — Zuerst wird eine geschlossene Lösung für die Funktion von ψ gegeben. Für die Funktion von φ bekommt man eine Differentialgleichung. Eine geschlossene Lösung für diese Gleichung kann nicht angegeben werden. Es wird nun an Hand eines Beispiels ein numerisches Integrationsverfahren angegeben, mit dem eine Lösung für die Funktion φ gefunden werden kann. Für das Beispiel wird die Lagerkraft und ihre Richtung berechnet. *Dizioğlu* (Istanbul).

Sidrak, Sobhy: The drag on a circular cylinder in a stream of a viscous liquid at small Reynolds numbers. *Proc. Irish Acad. A* **53**, 17—30 (1950).

Auf Grund einer Arbeit von Filon [*Proc. R. Soc., London A* **113**, 7—27 (1926)], in der die Randbedingungen an der Zylinderoberfläche nicht erfüllt wurden, wird der Widerstand eines Zylinders bei sehr kleinen Reynoldszahlen bis zur vierten Näherung berechnet und mit den Ergebnissen von Bairstow [*Trans. Cambridge phil. Soc.* **23**, 71 (1924)] verglichen. *Pretsch* (Bonn).

Sidrak, Sobhy: The flow of a viscous liquid past an elliptic cylinder. *Proc. Irish Acad. A* **53**, 65—81 (1950).

Geschwindigkeitsfeld und Widerstand für einen bei sehr kleinen Reynoldszahlen Re gleichförmig bewegten elliptischen Zylinder werden mit Hilfe von Mathieu- und modifizierten Mathieufunktionen bis zur zweiten Näherung berechnet und dadurch die Ergebnisse von Piercy und Winny [*Proc. R. Soc., London, A* **140**, 543—561 (1933)] und Davies [*Phil. Mag., VII. S.* **31**, 283 (1941)] besonders für $4 \leq \text{Re} \leq 12$ verbessert. *Pretsch* (Bonn).

Illingworth, C. R.: Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid. Proc. Cambridge phil. Soc. 46, 469—478 (1950).

Die vorliegende Arbeit gibt folgende exakte Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Medien: Die Scherströmung zwischen parallel bewegten Platten (Couette-Strömung) und zwischen koaxial rotierenden Zylindern. Die Grenzschichtströmung an einer Platte mit Absaugung. Eine Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen ergibt sich für die Strömung über einer rotierenden Scheibe und um einen Zylinder mit Absaugung. Hingegen ergibt sich keine einfache, der Hagen-Poiseuille-Strömung entsprechende Lösung. Zum Teil wird die Schwerkraft berücksichtigt. Auch die Schichtung eines Gases unter deren Einwirkung im mechanischen und thermischen Gleichgewicht wird beschrieben. *Oswatitsch.*

Schuh, Über die Lösung der laminaren Grenzschichtgleichung an der ebenen Platte für Geschwindigkeits- und Temperaturfeld bei veränderlichen Stoffwerten und für das Diffusionsfeld bei höheren Konzentrationen. Prof. Dr. L. Prandtl zum 70. Geburtstag. Z. angew. Math. Mech. 25/27, 54—60 (1947).

Bei konstanten Stoffwerten lassen sich Geschwindigkeitsfeld u und Temperaturfeld T der laminaren Grenzschicht als Funktionen der einen dimensionslosen Variablen $\xi = \frac{1}{2} y \sqrt{U/\nu x}$ auffassen und genügen zwei Integralgleichungen, deren erste durch Iteration lösbar ist und das bekannte Blasiusprofil für u liefert, während die zweite einfach eine Quadraturformel zur Berechnung von T aus u darstellt (Pohlhausen). Da die Stoffwerte allgemein nur von T abhängen, setzt Verf. sie ebenfalls als Funktionen von ξ an und schlägt zur Lösung der nunmehr gekoppelten Integralgleichungen ein Iterationsverfahren vor, bei dem man — mit einem geeigneten Blasius- bzw. Pohlhausen-Profil anfangend — im allgemeinen in drei bis vier Schritten zum Ziel kommt. Das Verfahren ist auch unter Berücksichtigung der Reibungswärme durchführbar. Die Ergebnisse für einige durchgerechnete Beispiele werden mitgeteilt und physikalisch diskutiert. Schließlich wird die Anwendbarkeit des Verfahrens auf das Diffusionsproblem an der ebenen Platte gezeigt und auch hierfür ein Zahlenbeispiel gegeben.

Weissingen (Hamburg).

Fajnsil'ber, A. M.: Verallgemeinerung der Theorie des „Mischungsweges“ auf das Umströmen eines krummlinigen Profils. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 555—558 (1947) [Russisch].

Bei der Integration der Differentialgleichungen der turbulenten Grenzschicht

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

wird in erster Näherung angenommen, daß u und v nicht von x abhängen, so daß man

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{\delta dp/dx}{\tau_0} \eta$$

findet. Mit dem Prandtl-Kármánschen Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = k \frac{(\partial u_1 / \partial \eta)^2}{c^2 u_1 / \partial \eta^2}$$

aus der Theorie des Mischungsweges findet man damit für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht:

$$u_1(x) = \frac{1}{K} \left(\sqrt{1 + b(x)} - \sqrt{1 + b(x)} \eta + \log \frac{\sqrt{1 + b(x)} - 1}{\sqrt{1 + b(x)} \eta - 1} \right).$$

Dabei bedeuten $\eta = \frac{y}{\delta}$, $u_1 = \frac{U - u}{v^*}$, $b(x) = \frac{\delta dp/dx}{\tau_0}$ (U Geschwindigkeit am Rande

der Grenzschicht, $v^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ Schubspannungsgeschwindigkeit, δ Grenzschichtdicke). — Durch Vergleich mit den Experimenten bei $dp/dx = 0$ wird $k = 0,4$

gesetzt. Mit $c_f = \frac{\tau_0}{\rho U^2/2}$ ergibt sich folgendes Widerstandsgesetz

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \alpha + \frac{1}{K} \left\{ \sqrt{1 + b(x)} - 1 + \log \frac{2\sqrt{1 + b(x)} - 1}{b(x)} - \log \alpha + \log R_c^* \right\}.$$

Hier ist $R_c^* = v^* \delta/\nu$ gesetzt. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit Messungen von Fage und Falkner [ARSR Nr. 1315 (1931)]. *K. Schröder* (Berlin).

Nevzgliadov, V. G.: Über turbulente Strömung in rauen Rohren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 55, 107—110 (1947) [Russisch].

Bers, Lipman: An existence theorem in two-dimensional gas dynamics. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1, (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Non-linear problems in mechanics of continua.) 41—46 (1949).

Für ebene Potentialströmungen des hypothetischen Čaplyginschen Gases $c_p/c_v = -1$ wird der Satz skizziert: Ist P ein konvexes und stetig gekrümmtes Profil, das höchstens in einem Punkte z eine scharfe Kante besitzt, so existiert zu jedem vorgegebenen Anstellwinkel und jeder vorgeschriebenen Maximalgeschwindigkeit am Profil eine Potentialströmung um P , die im Unendlichen in die verlangte Parallelströmung übergeht und die die Kutta-Joukowskibedingung in z erfüllt. — Zum Beweis wird zunächst das Außengebiet von P auf das eines Kreises abgebildet. Die Randwertaufgabe wird dann auf die Lösung einer Integralgleichung einer einzigen reellen Variablen zurückgeführt. Über die Eindeutigkeit der Lösung kann nichts gesagt werden. — In einer Schlußbemerkung sagt der Verf., daß er die Bedingung der Konvexität des Profils durch eine weniger einschneidende ersetzen kann, der die aerodynamisch wichtigen Profile genügen. *Wendt* (Bonn).

Stewart, H. J.: The lost solutions in axially symmetric irrotational compressible fluid flow. Quart. appl. Math. 6, 334—337 (1948).

Man versteht unter „verlorenen Strömungen“ solche isentropen Strömungen, für die bei der Legendreschen Transformation die Jacobische Funktionaldeterminante $D = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ der Geschwindigkeitskomponenten u, v nach den Ortskoordinaten x, y identisch verschwindet. Im ebenen Fall sind dies außer den Parallelströmungen die praktisch höchst wichtigen Prandtl-Meyerschen Expansionsströmungen um eine konvexe Wand. — Verf. bestimmt die verlorenen Strömungen für den drehsymmetrischen Fall. Er benutzt dazu eine leichte Verallgemeinerung derjenigen Methode, die H. Bateman [Proc. nat. Acad. Sci. USA 16, 816—825 (1930)] für den ebenen Fall anwandte. Aus $D = 0$ folgt $u = A(s)$, $v = B(s)$ und also $\varrho = F(s)$ [ϱ = Dichte, $F(s)$ aus $A(s)$ und $B(s)$ geeignet aufgebaut]. $s = s(x, y) = \text{const}$ gibt die Isotachen der Strömung. Die Wirbelfreiheit führt zu $B'(s) \partial s / \partial x = A'(s) \partial s / \partial y$, so daß die Isotachen geradlinig sind. Die Kontinuitätsgleichung führt, vom Fall (1) $B'(s) \partial s / \partial x = A'(s) \partial s / \partial y = 0$ abgesehen, auf $y \partial s / \partial x = g(s)$, $y \partial s / \partial y = h(s)$. Aus $s = s(x, y)$ folgt [für (2) $\partial s / \partial x \neq 0$] $x = x(s, y)$ mit $\partial x / \partial s = y/g(s)$, $\partial x / \partial y = -h(s)/g(s) = -B'(s)/A'(s) = H(s)$ und daraus $x = y H(s) + c$ (c = Integrationskonstante). Daher ist $s = s(y/(x - c))$. Der Ausnahmefall (2) wird durch $c \rightarrow \infty$ erfaßt. Sonst kann c durch geeignete Wahl des Koordinatenursprungs auf $c = 0$ gebracht werden. Es gibt also nur die Lösungen $s = s(y)$ und $s = s(y/x)$. Diskussion dieser beiden Fälle und des Ausnahmefalles (1) zeigt: Die einzigen verlorenen achsensymmetrischen (isentropen) Strömungen sind a) die homogene Parallelströmung, b) die durch Aufreihen der 2-dimensionalen Quelle auf die Achse entstehende Strömung, c) die Überlagerung der beiden Strömungen a) und b) und d) die Taylor-Maccollsche Überschallströmung um einen Kegel mit anliegender Kopfwelle. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

Tempest, R. K.: The estimation of velocities and local Mach numbers in the flow of a compressible fluid through divergent nozzles, under adiabatic and isothermal conditions. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 41, 382—392 (1950).

Berechnung reibungsfreier, stationärer, achsensymmetrischer Gasströmungen durch divergente Düsen unter der Voraussetzung, daß die Neigung einer Stromlinie in einem Punkte proportional zum Abstand dieses Punktes von der Symmetrieachse

ist. Die Arbeit enthält Tabellen für die Bestimmung adiabatischer und isothermer Düsenströmungen. *Wendt (Bonn).*

Poritsky, R., B. E. Sells and C. E. Danforth: Graphical, mechanical and electrical aids for compressible fluid flow. *J. appl. Mech.*, New York 17, 37—46 (1950).

Die Arbeit behandelt stationäre wirbelfreie Unterschallströmungen. Zunächst wird das zuerst von Busemann (Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 4, 1931) angegebene graphische Verfahren der Konstruktion des von den Strom- und Potentiallinien gebildeten Rechtecknetzes für ebene und achsensymmetrische Strömungen entwickelt. Mechanisch läßt sich dies Verfahren bei ebenen Strömungen durch Verwendung von zwei sich stets orthogonal durchsetzenden verschiebbaren Kurvenscharen durchführen. Das stationäre elektrische Feld in einer Platte veränderlicher Leitfähigkeit läßt sich auf zwei Arten zur Konstruktion kompressibler, ebener Strömungen benutzen. Dabei entspricht die Dichte der Gasströmung entweder der Leitfähigkeit oder dem Widerstand. Ein solches elektrisches Feld läßt sich durch Verwendung eines Quadratgitters (*d-c-board*), in dessen Seiten veränderliche Widerstände eingebaut sind, näherungsweise verwirklichen. Das elektrische Bild läßt sich auch durch ein stationäres magnetisches Feld mit nichtlinearer *HB*-Relation (*H* magnetische Feldstärke, *B* magnetische Induktion) ersetzen. Bei der Konstruktion einer Gasströmung entspräche dann der Dichte die magnetische Permeabilität. Erwähnt wird die bekannte Analogie von Taylor und Sherman. — Die angeführten graphischen, mechanischen und elektrischen Analogien werden durch Beispiele erläutert. *Wendt (Bonn).*

Wendt, H.: Die Jansen-Rayleighsche Näherung zur Berechnung von Unterschallströmungen. *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl.* 1948, Nr. 7, 26 S. (1948).

Zunächst legt Verf. eingehend die von ihm und E. Lamla [Luftfahrtforschung 18, 311—316 (1941) bzw. Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung] herrührende komplexe Integrationsmethode für die einzelnen Näherungen des Jansen-Rayleigh-Verfahrens dar, in dem bekanntlich das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion einer ebenen Unterschallströmung in der Form

$$(1a) \quad \varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + M^2 \varphi_1(x, y) + M^4 \varphi_2(x, y) + \dots \quad \text{bzw.}$$

$$(1b) \quad \psi(x, y) = \psi_0(x, y) + M^2 \psi_1(x, y) + M^4 \psi_2(x, y) + \dots$$

angesetzt werden [*M* Machsche Zahl der Anströmung *U*; $\varphi_0(x, y)$ Geschwindigkeitspotential, $\psi_0(x, y)$ Stromfunktion der inkompressiblen Strömung um dasselbe Hindernis]. Nach Zulassung komplexer Werte für *x* und *y* wird die Koordinatentransformation $z_1 = x + i y$, $z_2 = x - i y$ durchgeführt, wodurch die in (1a) und (1b) vorkommenden Funktionen $\varphi_\nu(x, y)$, $\psi_\nu(x, y)$ in gewisse Funktionen $\Phi_\nu(z_1, z_2)$, $\Psi_\nu(z_1, z_2)$ übergehen, die zu komplexen Potentialen

$$\Omega_\nu(z_1, z_2) = U^{-1} \{ \Phi_\nu(z_1, z_2) + i \Psi_\nu(z_1, z_2) \}$$

zusammengefaßt werden. Die Funktionen $\Omega_\nu(z_1, z_2)$ werden in der physikalisch allein sinnvollen Ebene $z_1 = \bar{z}_2$ des z_1, z_2 -Raumes aus den Rand- und Symmetriebedingungen mit Hilfe der zusätzlichen Annahme ermittelt, daß sie in jedem inneren Punkte des Strömungsgebiets analytische Funktionen von $z_1 = z$ und $z_2 = \bar{z}$ sind und ihre Komponenten $\Phi_\nu(z_1, z_2)$, $\Psi_\nu(z_1, z_2)$ dort reelle Werte annehmen. Anschließend berechnet Verf. nach dieser Methode die zweite Jansen-Rayleigh-Näherung $\Omega_0(z, \bar{z}) + M^2 \Omega_1(z, \bar{z})$ der Potentialströmung um ein Kreisprofil vom Radius *R*, das symmetrisch in einem Kanal mit festen Wänden vom Abstand $2h$ liegt. Zu diesem Zweck werden die Funktionen $\Omega_0(z, \bar{z})$ und $\Omega_1(z, \bar{z})$ nach Potenzen von $\pi R/2h$ entwickelt und bis einschließlich $(\pi R/2h)^6$ beibehalten. Als numerisches Ergebnis erhält Verf. für die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt an der Kanalwand

$$\frac{u_K}{U} = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi R}{2h} \right)^2 + \frac{1}{48} \left(\frac{\pi R}{2h} \right)^4 + \frac{1}{576} \left(\frac{\pi R}{2h} \right)^6 + \dots$$

$$+ M^2 \left[\frac{11}{24} \left(\frac{\pi R}{2h} \right)^2 + \frac{79}{576} \left(\frac{\pi R}{2h} \right)^4 + \frac{911}{34560} \left(\frac{\pi R}{2h} \right)^6 + \dots \right], \quad \frac{v_K}{U} = 0$$

und für die Maximalgeschwindigkeit am Kreise:

$$\frac{v_x}{U} = 2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi R}{h} \right)^2 + \frac{1}{45} \left(\frac{\pi R}{h} \right)^4 + \frac{11}{5040} \left(\frac{\pi R}{h} \right)^6 + \dots \\ + M^2 \left[\frac{7}{6} + \frac{43}{42} \left(\frac{\pi R}{h} \right)^2 + \frac{443}{2700} \left(\frac{\pi R}{h} \right)^4 + \dots \right], \quad \frac{v_x}{U} = 0.$$

Beide Ergebnisse stimmen bis zu den quadratischen Termen von $\pi R/h$ mit den Rechnungen von E. Lamla überein [Luftfahrtforschung **17**, 329—331 (1940)]. — Das falsche Vorzeichen im Exponenten der Gl. (4) und (12) hat keinen Einfluß auf das Ergebnis der Rechnung, da sich diese an die vorzeichenrichtigen Gl. (18) bis (20) anschließt.

Hans Schubert (Rostock).

Poritsky, H.: Polygonal approximation method in the hodograph plane. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1, (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Non-linear problems in mechanics of continua.) 94—116 (1949).

Die vorliegende Arbeit bringt einen Beitrag zur Chaplyginschen Hodographenmethode zur Berechnung von ebenen kompressiblen Strömungen. Nach Kármán-Tsien wird bei dieser Methode die adiabatische Zustandsgleichung in der $(p, 1/\varrho)$ -Ebene durch die Tangente im Punkt p_∞, ϱ_∞ angenähert (p = Druck, ϱ = Dichte, ∞ = ungestörte Strömung). Hier wird eine Erweiterung dieser Methode gegeben, die darin besteht, daß die Kurve p über $1/\varrho$ anstatt durch die Tangente durch einen Polygonzug angenähert wird. Als Beispiel wird die kompressible Strömung durch ein unendliches ebenes Gitter behandelt, das aus lauter Einzelwirbeln besteht.

H. Schlichting (Braunschweig).

Ovsjannikov, L. V.: Über eine Gasströmung mit gerader Übergangslinie. Priklad. Mat. Mech., Moskva **13**, 537—542 (1949) [Russisch].

S. A. Čaplygin hat in seiner Arbeit: Über Gasstrahlen (Ges. Abh., Bd. 2, Moskau-Leningrad 1948) die stationäre Unterschallströmung eines Gases aus einem Halbraum durch einen Spalt in einen Raum vom Drucke p_0 behandelt. Verf. betrachtet den Grenzfall, wo p_0 gleich dem kritischen Druck ist. Er zeigt, daß der austretende Strahl längs einer geraden Übergangslinie, die senkrecht auf den Stromlinien steht, in endlichem Abstand vom Spalt in eine Parallelströmung mit Schallgeschwindigkeit übergeht. Den Schluß der Arbeit bilden Abschätzungen für $\partial\tau/\partial\varphi$ und $\partial^2\tau/\partial\varphi^2$ (τ Quadrat des Geschwindigkeitsbetrages, φ Potential) längs der Symmetrieachse des Strahles.

Wendt (Bonn).

Behrbohm, Hermann: Näherungstheorie des unsymmetrischen Schalldurchgangs in einer Lavaldüse. Z. angew. Math. Mech. **30**, 101—112 (1950).

Die gasdynamische Gleichung kann in Schallnähe auf die Form:

$$(1) \quad \omega_{xx} \cdot \omega_x + \omega_{yy} = 0$$

gebracht werden. Dabei ist ω_x im wesentlichen der Unterschied von Geschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit, womit Gl. (1) bei Unterschallgeschwindigkeit elliptisch, bei Überschallgeschwindigkeit hyperbolisch wird. Mit x als Hauptströmungsrichtung erweist sich ω_{xx} , welches dem Geschwindigkeitsgradienten entspricht, an der engsten Stelle einer beschleunigt durchströmten Lavaldüse als von einerlei Vorzeichen und annähernd konstant. Damit kann Gl. (1) in diesem Fall als Wärmeleitungsgleichung mit leicht veränderlicher Temperaturleitfähigkeit ω_{xx} angesehen und sowohl im Überschall- als auch im Unterschallteil einheitlich als parabolische Gleichung behandelt werden. In der vorliegenden Arbeit werden die Strom- und Potentiallinien als Koordinaten verwendet, was eine Gl. (1) ergibt, welche auf der Schallisotache exakt gilt. Für diese ergibt sich sogar eine exakte Lösung. Sie unterscheidet sich von den bisher bekanntgewordenen Näherungen dadurch, daß sie die exakte gasdynamische Gleichung gerade an der kritischen Geschwindigkeit genau erfüllt. An ihr wird die Mengenkorrektur-Formel von Oswatitsch-Rothstein weitgehend bestätigt.

Oswatitsch (Stockholm).

Tempest, R. K.: The supersonic flow of compressible fluid through axially symmetric tubes of uniform and varying section. *Proc. R. Soc., London, A* **200**, 511—523 (1950).

Verf. behandelt kompressible, reibungsfreie, achsensymmetrische Potentialströmungen bei Überschall innerhalb der linearisierten Theorie. Es wird eine Schar von Düsen mit dem gleichen Geschwindigkeitsprofil am Eingang der Düse angegeben. Genauer wird der Fall untersucht, wo das Geschwindigkeitsprofil am Beginn parabolisch ist. Der letzte Paragraph ist der näherungsweise Berechnung von Gasströmungen in geradlinigen Rohren gewidmet. Bei allen Überlegungen wird das Geschwindigkeitspotential durch Reihen in Besselschen Funktionen gegeben.

Wendt (Bonn).

Whitham, G. B.: The behaviour of supersonic flow past a body of revolution, far from the axis. *Proc. R. Soc., London, A* **201**, 89—109 (1950).

Verf. behandelt das asymptotische Verhalten stationärer, rotationsfreier achsensymmetrischer Parallelströmungen bei Überschall um Rotationskörper endlicher Länge. Im ersten Teil der Arbeit werden in den Differentialgleichungen der Gasdynamik über die lineare Näherung hinausgehend einige der quadratischen Glieder in den Zusatzgeschwindigkeiten zur Parallelströmung berücksichtigt. Die in dieser Näherung gefundenen asymptotischen Ausdrücke für die Charakteristiken und Geschwindigkeitskomponenten liefern im zweiten Teil der Arbeit die Ansätze für eine an die exakten Differentialgleichungen der Gasdynamik sich anschließende asymptotische Theorie für achsensymmetrische Strömungen. U. a. erhält man damit als Gleichungen für die Verdichtungsstöße am Kopf bzw. am Bug eines Rotationskörpers endlicher Länge bei großen Entfernungen r von der x -Achse:

$$x = \alpha r - b r^3 - c - d r^{-1} - \dots \quad \text{bzw.} \quad x = \alpha r + b_1 r^3 - \dots$$

($\alpha = \sqrt{M^2 - 1}$, M Machsche Zahl der Anströmung; b, b_1, c, d Konstanten, die vom umströmten Körper abhängen).

Wendt (Bonn).

Lighthill, M. J.: The shock strength in supersonic „conical fields“. *Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S.* **40**, 1202—1223 (1949).

Verf. behandelt stationäre, rotationsfreie Überschallströmungen in kegeligen Feldern. Es wird eine von den exakten Differentialgleichungen der Gasdynamik ausgehende Theorie entwickelt, die es gestattet, eine kegelige Strömung in der Umgebung des von der Spitze des kegeligen Feldes ausgehenden Machschen Kegels sukzessive zu berechnen. Es zeigt sich, daß die Stärke des von der Spitze ausgehenden Verdichtungsstoßes in erster Näherung durch die linearisierte Theorie berechnet werden kann. Die Theorie wird auf Beispiele angewandt, für die die Lösung nach der linearisierten Theorie bekannt ist (dünner Kegel, angestelltes Dreieck, angestelltes Rechteck).

Wendt (Bonn).

Becker, John V.: Results of recent hypersonic and unsteady flow research at the Langley aeronautical laboratory. *J. appl. Phys., Lancaster Pa.* **21**, 619—628 (1950).

Cabannes, Henri: Sur l'onde de choc attachée lorsque la vitesse aval à la pointe de l'obstacle est subsonique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **230**, 1830—1832 (1950).

Die Rolle der in vorstehender Note aufgedeckten Folge von singulären Machzahlen $M_r(\varepsilon)$ wird in der vorliegenden Note auf die Weise beleuchtet, daß in den Ansatz für die Gleichung (in Cartesischen Koordinaten x, y) der Stoßfront nicht-analytische Terme [zusätzliche nicht-ganzzahlige Potenzen von y in der Entwicklung von $x = F(y)$] mit aufgenommen werden:

$$x = y \cot \beta + A y^{1+m} + \dots + B y^{r+1} + \dots \quad (\beta = \beta \text{ in der Spitze}),$$

falls genau die r ersten Ableitungen von θ nach s verschwinden. Das System der Bewegungsgleichungen

$$\varrho q^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = - \frac{\partial p}{\partial n}, \quad \varrho q^2 \frac{\partial \theta}{\partial n} = \left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right) \frac{\partial p}{\partial s} \quad (\varrho \text{ Dichte, } p \text{ Druck})$$

wird für Unterschallgeschwindigkeit hinter der anliegenden Kopfwelle unter der Annahme hinreichend kleiner p , q , a -Schwankungen auf ein Cauchy-Riemannsches System gebracht und daraus dann durch Einführung einer die Randbedingungen auf Körperkontur und Kopfwelle (in der Nachbarschaft der Spitze) erfüllenden analytischen Funktion der Tatbestand gefolgert: Wächst M von M_0 bis M^* , so wächst der Exponent m von 0 bis ∞ . Diejenigen Werte von M , für die m ganzzahlig wird, sind dann gerade die singulären M von früher. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

Cabannes, Henri: *Étude de la singularité au sommet d'une onde de choc attachée, dans un écoulement à deux dimensions.* C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 923—925 (1949).

In dieser Note werden die Untersuchungen fortgeführt, die L. Crocco [Atti 1° Congr. Un. mat. Ital. **1937**, p. 597—615 und L'Aerotecnica **17**, 519—534 (1937)] und G. Guderley angestellt haben über das singuläre Verhalten einer homogenen Überschallparallelströmung beim Auftreffen auf einen Störkörper mit scharfer Schneide des halben Öffnungswinkels ε als Vorderkante (ebenes Problem) für den Fall der anliegenden Kopfwelle. Verf. gibt ein Formelsystem an, demzufolge die (in Stromrichtung und senkrecht dazu gebildeten) Ableitungen der Stromlinienkrümmung in Punkten des stromabseitigen Ufers der Stoßfront in Beziehung gesetzt werden zu den Ableitungen der Stoßfrontkrümmung in eben diesen Punkten. Die wichtigere dieser Formeln sei hier angeben:

$$\left\{1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta - \theta)\right\}^r \frac{\partial^r \theta}{\partial s^r} = f_r(M, \varepsilon) \frac{d^r \beta}{d\sigma^r} + P_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Dabei ist θ der Strömungswinkel, q der Geschwindigkeitsbetrag, a die Schallgeschwindigkeit hinter der Kopfwelle, M die Machzahl der Anströmung, β der Neigungswinkel der Stoßfront gegen die Anströmrichtung, s die krummlinige Abszisse in Strömungsrichtung und σ diejenige in Richtung der Stoßfront. P_r ist ein Polynom ohne konstantes Glied in den partiellen Ableitungen von θ von kleinerer als r -ter Ordnung. — Es sei M_0 die kleinste Machzahl der Anströmung, für welche die Kopfwelle anliegt, $M^* > M_0$ diejenige Machzahl, für die hinter der Kopfwelle in der unmittelbaren Umgebung der Spitze gerade Schallgeschwindigkeit herrscht. Behauptet wird: für $M \geq M^*(\varepsilon)$ ist $f_r(M, \varepsilon) > 0$ für alle r . Für $M_0 < M < M^*$ dagegen verschwinden die f_r jeweils bei geeigneten singulären Machzahlen M_r und es gilt $M_0 < M_1 < M_2 < \dots < M_r < M_{r+1} < \dots$; $\lim_{r \rightarrow \infty} M_r(\varepsilon) = M^*(\varepsilon)$. — Im

speziellen Fall, daß das Vorderteil des Störkörpers aus einem Keil besteht, ergibt sich: Für $M = M_0$ liegt in der Spitze eine wesentliche Singularität vor: alle Ableitungen der Stoßfrontkrümmung sind unendlich; mit monoton wachsendem M gehen diese Ableitungen eine nach der anderen sprunghaft von Unendlich auf Null; für $M = M^*$ schließlich verschwinden alle Ableitungen, die Kopfwelle ist ein Stück weit geradlinig. Im genannten Spezialfall besteht die Singularität der Strömung in der Spitze also gerade so lange, wie Unterschallgeschwindigkeit hinter der Kopfwelle in der Umgebung der Spitze herrscht. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

Neumann, J. von and R. D. Richtmyer: *A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks.* J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 232—237 (1950).

Bei der schrittweisen numerischen Berechnung von kompressiblen Strömungen ergeben sich Schwierigkeiten beim Auftreten von Verdichtungsstößen. Nach einem Vorschlag der Verff. werden diese Schwierigkeiten dadurch behoben, daß durch Einfügung künstlicher Dissipationsglieder in die Differenzengleichungen die Stoßwelle gewissermaßen „verschmiert“ wird, wobei die Dicke der Stoßwelle vergleichbar mit der Maschenweite der Differenzenrechnung wird. Das künstlich eingefügte Zusatzglied, das im übrigen eine beliebige Funktion des Druckes, der Dichte usw. sein kann, muß außer der Stetigkeit die Eigenschaft haben, daß es außerhalb der Stoßwelle verschwindet und die Rankine-Hugoniotische Gleichung erfüllt ist, wenn man einen Bereich ins Auge faßt, der groß gegen die Dicke der Stoßwelle ist. Diese Methode wird zunächst nur auf eindimensionale Probleme angewandt, doch scheint sie

auch für kompliziertere Strömungsprobleme geeignet zu sein. Verff. untersuchen ferner die Wirkung kleiner Störungen und zeigen, daß diese im Bereich der Stoßwellen gedämpft werden, während sie sich außerhalb der Stoßwellen unverändert fortpflanzen. Das Gleichungssystem hat also im Bereich der Stoßwelle den Charakter einer Diffusionsgleichung, außerhalb davon jedoch hyperbolischen Charakter.

Wuest (Göttingen).

Herzfeld, Karl F.: Betrachtungen über Knotenflächen bei Schwingungsproblemen. Z. Naturforsch. 3a, 457—460 (1948).

L'A. considera le superficie nodali nei problemi di vibrazioni e completa o estende alcuni teoremi già conosciuti relativi a due dimensioni o al solo caso delle variabili separabili. — Per es. la dimostrazione di A. Sommerfeld (Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI, Wiesbaden, 1947, pp. 176—177) del teorema che al crescere degli autovalori cresce anche la „finezza“ (Feinheit) della suddivisione del campo in campi di segno alternato si estende da due ad un qualunque numero di dimensioni. — La proprietà che se le linee nodali passano per uno stesso punto ivi esse formano angoli eguali si estende a tre dimensioni. — Nel caso di un numero qualunque di dimensioni, una superficie nodale o è chiusa o va all'infinito o termina al contorno. — L'A. dedica infine alcune riflessioni alla variazione adiabatica delle oscillazioni e afferma che il numero delle superficie nodali può variare.

G. Lampariello (Messina).

Green, George: Waves in deep water due to concentrated surface pressure. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VIII. S. 39, 738—743 (1948).

Kaleckaja, E. M.: Zur Theorie des hydraulischen Stoßes in Gasleitungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 1029—1032 (1950) [Russisch].

L'A. étudie la propagation adiabatique d'une onde de choc dans un gaz le long d'une conduite cylindrique; il est tenu compte de la compressibilité du gaz, de la non-constance, de la vitesse de propagation et de l'élasticité de la conduite. L'A. forme l'équation indéfinie aux dérivées partielles que vérifie l'énergie par unité de masse et indique diverses méthodes d'intégration approchée de celle-ci.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Markov, I. M.: Über die räumliche Strömung einer Flüssigkeit in einem richtenden und einem rotierenden Turbinengitter, die hintereinander angeordnet sind. Doklady Akad. Nauk. SSSR, n. S. 71, 245—248 (1950) [Russisch].

Etudiant la couche limite dans le voisinage des aubes des turbines, l'A. note: $MM' = y$, un élément de normale en M à l'aube; φ , l'angle des vitesses en M et M' . Moyennant des hypothèses simplificatrices convenables, il forme l'équation différentielle du premier ordre en $\varphi(y)$, dont il calcule une solution approchée, valable dans le voisinage de la périphérie de la couche. Il conclut de là à l'existence des déplacements radiaux du liquide, qui peuvent être orientés soit vers la périphérie, soit en sens inverse ($d\varphi/dy \leq 0$). — Bien entendu, l'analyse qui précède ne saurait prétendre à la rigueur; mais l'A. souligne l'importance (au point de vue technique) que présente le phénomène décrit.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Dmitriev, G. T.: Berechnung der Charakteristiken einer stationären, sich fließend verändernden Bewegung in prismatischen Kanälen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 825—827 (1949) [Russisch].

Es handelt sich um die Fortpflanzung von Wellen in einem prismatischen Kanal bei einer langsam veränderlichen Strömung, also ein Problem der Hydraulik.

Hamel (Landshut).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

• **Hund, Friedrich: Einführung in die theoretische Physik. V.: Atom- und Quantentheorie.** (Meyers Kleine Handbücher Bd. 56/57.) Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1950. 311 S.

Als Abschluß der „Einführung in die theoretische Physik“ behandelt dieser Band den atomistischen Bau der Materie, das Versagen der klassischen Physik und die Grundzüge der Quantentheorie. — Ausgehend von der Atomvorstellung werden zunächst deren Erfolge skizziert, dann aber am Beispiel der Wärmestrahlung und der spezifischen Wärme fester Körper das Auftreten des Wirkungsquantums dargestellt und gezeigt, wie dessen Einbau in die statistische Mechanik zu einer „Quantenstatistik“ führt, die diese (und andere) Effekte zu erklären vermag. — Anschließend wird das Ungenügen der klassischen Mechanik und Elektrodynamik für ein Verständnis des Atombaus und der Serienspektren dargelegt, und über die Bohrschen Postulate der Weg zum Korrespondenzprinzip gezeigt. Die allgemeine Formulierung dieses Prinzips mit Hilfe der Phasenintegrale sowie des Paulischen Ausschlußprinzips erlaubt dann ein Verständnis des Schalenbaus der Atome und damit des periodischen Systems; das Vektormodell der Atome gestattet sogar eine Einführung des Spins. Über eine Verschärfung des Korrespondenzprinzips gelangt man schließlich zur Heisenbergschen Matrixmechanik, als erster Form der Quantenmechanik, die sich so allerdings zunächst als bloße Vorschrift darbietet. Ein tieferes Verständnis, welches diese Vorschrift zur Theorie erhebt, wird erreicht in den folgenden Kapiteln. Zunächst wird an Hand des Comptoneffektes die Lichtquantenhypothese erörtert, und dann gezeigt, daß man durch Anwendung der Boseschen Statistik auf diese Lichtteilchen zur selben (Planckschen) Formel für die Energieverteilung der Strahlung im thermischen Gleichgewicht gelangt, die man auch durch die Annahme quantisierter Eigenschwingungen des Wellenbildes erhalten hatte. D. h. Wellen- und Teilchenbild, je mit einer nicht klassischen Abänderung (quantisierte Amplituden resp. Ununterscheidbarkeit) versehen, liefern dasselbe, mit der Erfahrung verträgliche Resultat. Hier zeigt sich zum ersten Male die Überwindung der Dualität Welle-Korpuskel durch die Quantentheorie. Anschließend wird in konsequenter Fortführung des Gedankens das Wellenbild der Materie aufgestellt und sein Verhältnis zum Teilchenbild erörtert. Man gelangt so zu der Heisenbergschen Kritik der Verwendung klassischer Begriffe im Mikroskopischen und ihrer Krönung: den Unbestimmtheitsrelationen. Aufbauend darauf wird nun die Wellenmechanik des Einteilchenproblems in Schrödingerscher Form aufgestellt und der Äquivalenzbeweis mit der Heisenbergschen Matrixmechanik wenigstens angedeutet. Damit ist eine einheitliche Quantentheorie gewonnen, die Wellen- und Teilchenbild umfaßt, und der korrespondenzmäßige Anschluß an diese beiden Bilder hergestellt. Eine Erörterung der wichtigsten Folgerungen aus dieser Quantentheorie des Einteilchenproblems sowie eine kurze Einführung in die Quantentheorie des Mehrteilchenproblems (unter Berücksichtigung von Spin und Austauschentartung) beschließen das Buch, das zuletzt in einen wissenschafts-historischen Ausblick mündet. *Schafroth.*

Powell, John L.: Recurrence formulas for Coulomb wave functions. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 72, 626—627 (1947).

Für Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \left\{ 1 - \frac{2\eta}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} \right\} F = 0$$

werden Rekursionsformeln hinsichtlich des Parameters L hergeleitet; d. h. die angegebenen Relationen verbinden Lösungsfunktionen, die bei gleichen Werten ρ und gleichen Werten η zu verschiedenen Werten L — nämlich L und $L-1$ — gehören.

Müller (Mainz).

Kallmann, Hartmut und Max Päsler: Neue Behandlungs- und Darstellungsmethode wellenmechanischer Probleme. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 2, 292—304 (1948).

Der Arbeit liegt die Idee zugrunde, die zur Behandlung von Differentialgleichungen der Physik in den letzten Jahren in zunehmendem Maße herangezogene Methodeder Laplace-Transformation auf die Schrödingergleichung anzuwenden. Die Methode ist hier aufs engste verwandt mit der seit langem gebräuchlichen des Überganges vom Koordinatenraum zum Impulsraum; letztere aber erfolgt durch Fouriertransformation an der dreidimensionalen partiellen Differentialgleichung, während hier ein gemischtes Verfahren angewandt wird, wie das im Abschnitt 3 der Arbeit durchgeführte Beispiel des Elektrons im Coulombfeld zeigt: Die Abseparation der Winkel erfolgt wie üblich im Koordinatenraum, und transformiert wird alsdann lediglich die (gewöhnliche) Differentialgleichung für den Radialteil. Die Arbeit enthält in den beiden ersten Abschnitten eine für den praktischen Rechner nützliche Zusammenstellung der wichtigsten Beziehungen über Laplace-Transformationen. Das behandelte Beispiel enthält natürlich keine neuen Ergebnisse. *Flügge.*

Kallmann, Hartmut und Max Päsler: Allgemeine Behandlung des H-Atoms mit beliebigen Anfangsbedingungen mittels der Laplace-Transformation und deren phy-

sikalische Bedeutung. Mitteilung II zu „Eine neue Behandlungs- und Darstellungsmethode wellenmechanischer Probleme“. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 2, 305—320 (1948).

Im Anschluß an die vorstehende Arbeit wird zunächst die Methode gegen die Fouriertransformation auf Impulse abgegrenzt. Als weiteres Beispiel wird der harmonische Oszillator behandelt. Endlich erfolgt die Diskussion der (radialen) Differentialgleichung des Coulombfeld-Problems für beliebige Randbedingungen, d. h. die Berechnung auch solcher Lösungen, die im Unendlichen nicht verschwinden, also keine Lösungen des Schrödingerschen Eigenwertproblems sind. *Flügge.*

Eisenhart, Luther Pfahler: Separation of the variables in the one-particle Schrodinger equation in 3-space. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 412—418 (1949).

L'A. cherche, de l'équation de Schrödinger, des solutions de la forme $\psi = X_1 X_2 X_3$, où X_i est fonction de la seule variable x^i et où les (x^i) forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales de l'espace euclidien, avec la métrique (*) $ds^2 = \sum H_i^2 (dx^i)^2$. L'A. cherche à cet effet à quelles conditions les H_i^2 sont de la forme

$$H_1^2 = \varphi_2 \varphi_3 \varphi_2 \varphi_3; \quad H_2^2 = \varphi_3 \varphi_1 \varphi_3 \varphi_1; \quad H_3^2 = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_1 \varphi_2$$

où les φ_i sont fonctions de la seule variable x^i et les ψ_i ne contiennent pas x^i . La nullité des composantes du tenseur de courbure de (*) fournit dans les différents cas la forme des H_i^2 et l'A. cherche dans quels cas les H_i^2 ont la forme de Stäckel. Ces résultats complètent ceux obtenus dans deux papiers précédents [Ann. Math., Princeton, II. S. 35, 284—305 (1934); Phys. Rev. 74, 87—89 (1948)]. *Lichnerowicz.*

Bartlett, M. S. and J. E. Moyal: The exact transition probabilities of quantum-mechanical oscillators calculated by the phase-space method. Proc. Cambridge phil. Soc. 45, 545—553 (1949).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 31, 336) wurde die Zuordnung von Wellenfunktionen $\psi(q)$ zu Verteilungsfunktionen $F(p, q)$ im Phasenraum untersucht; sie geschieht durch

$$F(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(q - \frac{1}{2} \hbar \tau) e^{-i\tau p} \psi(q + \frac{1}{2} \hbar \tau) d\tau.$$

Den Eigenfunktionen $u_n(q)$ eines wellenmechanischen Problems lassen sich in entsprechender Weise Eigenfunktionen

$$f_{kn}(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_k^*(q - \frac{1}{2} \hbar \tau) e^{-i\tau p} \psi(q + \frac{1}{2} \hbar \tau) d\tau$$

zuordnen, nach denen eine Verteilungsfunktion $F(p, q, t)$ in üblicher Weise entwickelt werden kann. Die Verteilungsfunktion $F(p, q, t)$ läßt sich mittels einer Transformationsfunktion aus der Verteilungsfunktion $F(p_0, q_0, t_0)$ gewinnen

$$F(p, q, t) = \iint k(p, q, p_0, q_0; t - t_0) F(p_0, q_0, t_0) dp_0 dq_0.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs von einem Zustand k nach einem Zustand n in einem Zeitintervall t ist exakt durch

$$p_{kn}(t) = h \iiint f_{kn}^*(p, q) k(p, q, p_0, q_0; t - t_0) f_{kn}(p_0, q_0) dp dq dp_0 dq_0$$

gegeben. Hierin sind f_{kn} und f_{nn} Eigenfunktionen im Phasenraum für das unge störte Problem. — Für den harmonischen Oszillator mit einer Störungsenergie $q E(t)$, wo $E(t)$ eine beliebige Zeitfunktion ist, liegen besonders einfache Verhältnisse vor, da sich die Transformationsfunktion explizit angeben läßt. Die f_{kn} und die $p_{kn}(t)$ werden streng berechnet. Für kleine Störungen stimmen die Ergebnisse mit denen einer üblichen Störungsrechnung überein; für zunehmende Störungsenergie werden Multipol-Übergänge immer wahrscheinlicher; die häufigsten Übergänge sind solche, bei denen die Energieänderung annähernd der Arbeit der störenden Kräfte gleich ist. *J. Meixner (Aachen).*

Taub, A. H.: A special method for solving the Dirac equations. Rev. modern Phys., New York **21**, 388—392 (1949).

Verf. beschreibt eine neue Methode zur Lösung der Diracgleichung für ein Elektron in einem gegebenen Felde. Die Methode ist nicht für jedes Feld anwendbar. Z. B. versagt sie für ein konstantes Feld. Im Feld einer ebenen Welle beliebiger Form ergeben sich wieder die Lösungen von D. M. Volkow [Z. Phys. **94**, 25 (1935)] und N. D. Sengupta (dies. Zbl. **30**, 92). Kockel (Leipzig).

Johnson, M. H. and B. A. Lippmann: Motion in a constant magnetic field. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 828—832 (1949).

Das hochgradig entartete Problem der Bewegung einer geladenen Partikel in einem homogenen magnetischen Feld wird nichtrelativistisch und relativistisch behandelt. Operatoren für die Bahnzentren werden eingeführt, ihre Verknüpfung mit den Operatoren der Energie, des Drehimpulses und des magnetischen Moments untersucht und Eigenfunktionen der Operatoren des Bahnzentrums und der Energie bestimmt. Kockel (Leipzig).

Johnson, M. H. and B. A. Lippmann: Relativistic motion in a magnetic field. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **77**, 702—705 (1950).

In einem inhomogenen Magnetfeld (Diracsche Theorie) kommutieren der Energieoperator H und der Operator $J = c\pi\sigma$. Damit existieren notwendigerweise Eigenfunktionen, die zugleich Eigenfunktionen von H und J sind. Sie stellen Zustände dar, in denen der Spin parallel oder antiparallel zum Materiestrom ist. Differentialgleichungen für die Bestimmung solcher Zustände werden angegeben und näher untersucht, was sich beim Übergang zum homogenen Magnetfeld und beim Verschwinden des Feldes (Übergang zur freien Partikel) ergibt. Kockel.

Havas, Peter: Prozesse zwischen leichten Teilchen nach der Diracschen Theorie — Eine Bemerkung zur gleichnamigen Arbeit von B. Kockel. Ann. Phys., Leipzig **VI. F. 7**, 413—414 (1950).

Kockel, B.: Bemerkung zur vorstehenden Arbeit. Ebenda, 415 (1950).

Feynman, R. P.: The theory of positrons. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 749—759 (1949).

Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen, das sich zur Zeit t_1 an einem Orte 1 befand, zur Zeit t_2 an einem Orte 2 anzutreffen, läßt sich bekanntlich durch die Ausbreitung eines Wellenpaketes beschreiben. Für die kräftefreie Bewegung ist die Funktion K_0 wohlbekannt. Verf. zeigt auf Grund seiner früher [Rev. mod. Phys. **20**, 367 (1948)] entwickelten Methode, daß unter dem Einflusse eines Potentials U die Funktion K_0 übergeht in ein $K(2,1) = K_0(2,1) + K_1(2,1) + K_2(2,1) + \dots$ mit

$$K_1(2,1) = -i \int K_0(2,3) U(3) K_0(3,1) d\tau_3$$

$$K_2(2,1) = (-i)^2 \iint K_0(2,4) U(4) K_0(4,3) U(3) K_0(3,1) d\tau_3 d\tau_4$$

($d\tau = d^3x dt$). Die Wahrscheinlichkeitsamplitude, eine Partikel im Zustande $\chi(x_2, t_2)$ zu finden, wenn man von einem $\psi(x_1, t_1)$ ausgeht, ist dann

$$\int \chi^*(2) K(2,1) \psi(1) d^3x_1 d^3x_2.$$

Dieses Verfahren läßt sich auf die Bewegung von positiven Teilchen nach der Dirac-Theorie übertragen, indem man wie Stueckelberg [Helv. phys. Acta **15**, 23—37 (1942)] und der Verf. [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **74**, 939—946 (1948)] die durch Überlagerung von Zuständen negativer Energie entstehenden Wellenpakete als Teilchen auffaßt, die mit positiver Energie in negativer Zeitrichtung laufen. Ein Paarerzeugungsprozeß wird z. B. durch eine Weltlinie beschrieben, die bis zu einem bestimmten Zeitpunkte in negativer und dann in positiver Zeitrichtung fortschreitet; entsprechend lassen sich auch virtuelle Paarbildungen auffassen. Durch Fortschreiten längs dieser Weltlinien, mit denen man an Stelle der der Erzeugung und Vernichtung unterworfenen Massen die unveränderliche Ladung verfolgt, wird es möglich, ein

allgemeines Schema für die Übergangsmatrizen z. B. bei Streuprozessen hinzuschreiben. Für die Auswertung hat man im allgemeinen von der Koordinaten-Zeit-Beschreibung zu einer Impuls-Energie-Darstellung überzugehen. (Einzelheiten bei F. J. Dyson, dies. Zbl. 32, 237, wo auch die Äquivalenz dieses Formalismus mit dem von Schwinger und Tomonaga gezeigt wird.) Es werden auch Prozesse untersucht, an denen mehrere Teilchen, jedoch ohne Wechselwirkung, teilnehmen. Eine folgerichtige Interpretation scheint nur bei Annahme des Ausschließungsprinzips möglich zu sein. In einem Anhang wird die Äquivalenz der vorliegenden Theorie mit der Löchertheorie bei zweiter Quantelung nachgewiesen. *Wessel.*

Costa de Beauregard, Olivier: Sur l'utilisation non paradoxale de la causalité avancée dans le point de vue spatio-temporel global. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1637—1639 (1950).

L'Au. montre comment, dans le formalisme des interactions entre corpuscules et champs développé par R. P. Feynman (voir l'analyse précéd.), la probabilité non superquantifiée P_{12} de la transition du premier ordre $1 \rightarrow 2$, comprenant à la fois les diffusions d'électrons ou de positrons et les créations ou annihilation de paires, n'exprime pas la probabilité réelle de la transition, mais que cette probabilité est de la forme $n_1 P_{12} n_2$, n_1 et n_2 représentant les nombres de corpuscules initialement présents dans l'état initial et finalement présents dans l'état final la transition étant supposée faite. De même la probabilité feynmanienne correspondant à l'effet Compton généralisé sur un électron libre subissant la transition $p_1, \psi_1 \rightleftharpoons p_2, \psi_2$ tandis que le photon superquantifié subit la transition $n_1, q_1, e_1 \rightleftharpoons n_2, q_2, e_2$ (e_1, e_2 vecteurs polarisation) avec $p_1 - p_2 + q_1 - q_2 = 0$, s'exprime par

$$n_2 \left\{ \iiint \bar{\psi}_2 [e_2 (p_1 + q_1 - m)^{-1} e_1 + e_1 (p_1 - q_2 - m)^{-1} e_2] \psi_1 \right\}^2 \delta\omega \} n_1.$$

Les considérations exposées montrent que l'introduction de la causalité avancée qui s'introduit dans le point de vue spatio-temporel global ne fait apparaître aucun paradoxe. *G. Petiau* (Paris).

Visconti, Antoine: Équation intégrale opératorielle d'évolution d'un système physique. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1744—1746 (1950).

En admettant que les prévisions concernant un système physique caractérisé par un opérateur d'évolution $U(t, t_0)$ évoluent selon une loi héréditaire au sens de V. Volterra, $U(t, t_0)$ satisfait à l'équation intégrale

$$U(t, t_0) = U^0(t, t_0) + \int_{t_0}^t F(t, \tau) U(\tau, t_0) d\tau$$

où F est un opérateur linéaire. Le formalisme de la théorie des prévisions qui se déduit de ces hypothèses se raccorde avec la théorie de M. R. P. Feynman (ce Zbl. 37, 124) ainsi qu'à la théorie de la matrice S de Heisenberg. *G. Petiau.*

Pauli, W. and F. Villars: On the invariant regularization in relativistic quantum theory. Rev. modern Phys., New York 21, 434—444 (1949).

In den Arbeiten von J. Schwinger über Quantenelektrodynamik [Phys. Rev., II. S. 75, 651—679, 1912—1925 (1949) und dies. Zbl. 32, 94] kommt es darauf an, bestimmte Ausdrücke in den „ D - und Δ -Funktionen“ an den singulären Stellen dieser Funktionen auszurechnen. Da diese Funktionen selbst schon singuläre Funktionen d. h. eigentlich nur durch einen Grenzprozeß zu definieren sind, kann man bei der Berechnung der gewünschten Ausdrücke ganz verschiedene Resultate erhalten je nach der Art des Grenzprozesses und der Reihenfolge der verschiedenen Grenzprozesse. Verff. geben nun ein eindeutig definiertes Verfahren, das in den betrachteten Fällen zu vernünftigen endlichen Resultaten führt. Es beruht darauf, daß man die singuläre Δ_m -Funktion zur Masse m ersetzt durch eine reguläre Funktion

$$\Delta_m^R = \Delta_m + \sum_i c_i \Delta_{m_i}$$

unter Zuhilfenahme der „Massen“ M_i , die man zum Schluß nach Durchführung aller weiteren Operationen gegen Unendlich gehen läßt. Damit die obige Funktion wirklich regulär wird, müssen die Bedingungen $1 + \sum_i c_i = 0$, $m^2 + \sum_i c_i M_i^2 = 0$ erfüllt werden. Verff. zeigen dann, wie in den einzelnen Fällen die Schwingerschen Ausdrücke zu regularisieren sind. — Die Bedeutung dieser Arbeit liegt weniger darin, ein Rechenverfahren zu geben, als vielmehr darin, eine Richtung zu weisen, in der vielleicht eine zukünftige Theorie durch „wirkliche“ (d. h. in der Natur vorkommende) Massen zu einer singularitätenfreien Theorie wird.

G. Ludwig (Berlin).

Brogie, Louis de: Sur la convergence des intégrales dans le problème de la polarisation du vide. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 2061—2063 (1950).

Es wird vorgeschlagen, in dem bei der Behandlung der Polarisation des Vakuums auftretenden divergenten Integral konvergenzerzeugende Faktoren einzufügen, die durch eine frühere Untersuchung des Verf. (dies. Zbl. **34**, 427) nahegelegt werden.

Lehmann (Jena).

Roberts, K. V.: Field dynamics. I. Classical, II. Quantum. Phys. Rev., Lancaster Pa., II **S. 77**, 146—147 (1950).

Es wird eine allgemeine Formulierung von klassischen und quantisierten Feldtheorien in der Wechselwirkungsdarstellung gegeben. Besonderes Gewicht wird auf die Parametrisierung der in dieser Darstellung auftretenden raumartigen Flächen gelegt.

Schafroth (Zürich).

Valatin, Jean G.: La représentation d'interaction et l'espace de configuration. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1456—1458 (1950).

L'Au. examine les conditions dans lesquelles par l'emploi de la représentation d'interaction et de l'espace de configuration il est possible de donner une représentation correcte du point de vue relativiste des systèmes de particules en interaction. La description relativiste de l'interaction des particules dans l'espace de configuration nécessite l'introduction en plus des variables de temps de chaque particule $t^{(1)}, t^{(2)} \dots t^{(N)}$, d'une variable d'espace-temps x, y, z, t jouant le rôle de paramètre et liée aux interactions. Le passage d'un système de référence à un autre nécessite de distinguer les variables d'espace-temps des particules et celles de l'interaction bien que les observations correspondent à $t = t^{(1)} = \dots = t^{(N)}$. La théorie développée admet une forme covariante en remplaçant les plans de simultanéité par des surfaces du genre espace de l'espace-temps.

G. Petiau (Paris).

Borsellino, Antonio: Sulle coppie di elettroni create da raggi gamma in presenza di elettroni. Rev. Univ. nac. Tucumán, A **6**, 7—35 (1947).

Scopo della memoria è un'applicazione del metodo delle perturbazioni di Dirac e dei principi dell'elettrodinamica quantistica per analizzare la generazione di coppie di elettroni nel processo di interazione fra raggi γ ed elettroni. L'A. calcola la sezione efficace elementare per la formazione di una coppia ed anche la sezione efficace totale, ricercando infine i valori asintotici di questa in corrispondenza a piccole e grandi energie del quanto γ incidente. L'espressione della sezione efficace totale viene discussa e in particolare viene rappresentato con un diagramma l'andamento di tale sezione in funzione dell'energia del quanto incidente. Un confronto è istituito fra i due casi che la generazione di una coppia avvenga in presenza di un elettrone o di un nucleo.

G. Lampariello (Messina).

Ghizzetti, Aldo: Sul calcolo di un integrale che compare nella teoria della produzione di coppie di elettroni. Rev. Univ. nac. Tucumán, A **6**, 37—50 (1947).

L'oggetto della memoria è il calcolo, adatto per valutazioni numeriche di precisione, di un integrale che, secondo il dott. A. Borsellino (vedi la recensione precedente) esprime la sezione efficace totale per la generazione di una coppia di

elettroni da parte di raggi γ in presenza di elettroni. La riuscita del metodo usato qui dall'A. è dovuta all'introduzione di due certi integrali che si riconducono agli integrali ellittici completi di 2^a specie. Le serie di Schlömilch permettono allora di effettuare delle valutazioni numeriche di grande precisione. *G. Lampariello.*

Gelfand, I. M. and A. M. Jaglom: Allgemeine relativistische invariante Gleichungen und unendlich-dimensionale Darstellungen der Lorentzgruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **59**, 655—658 (1948) [Russisch].

In Verallgemeinerung der Diracgleichung werden Gleichungen des Typs

$$\sum_{\nu=0}^s L^{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\nu}} + i k \psi = 0$$

betrachtet, bei denen die Werte der Funktionen $\psi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \psi(ct, x, y, z)$ einem endlich- oder unendlichdimensionalen Raum R angehören, in dem Darstellungen der Lorentzgruppe wirken. L^0, L^1, L^2, L^3 sind Matrizen im Raume R und k ist eine reelle Zahl. Mit Hilfe der von Gelfand und Neumark (Najmark) angegebenen irreduziblen unendlichdimensionalen Darstellungen der Lorentzgruppe [Acad. Sci. USSR. J. Phys. **10**, 93—94 (1946)] wird die allgemeine Gestalt der Gleichungen des obigen Typs betrachtet, die bei Lorentztransformationen invariant sind.

K. Schröder (Berlin).

Gião, Antonio: Sur la quantification du champ métrique et les interactions particules-champs. I. Application au champ électrique. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 278—280 (1950).

A partir de sa théorie unitaire [par exemple Portugaliae Math. **5**, 145—192 (1946)], l'A. esquisse une méthode de quantification des champs qui conduit directement aux potentiels de L. de Broglie (ce Zbl. **43**, 426, 427). Si g_{ik} et ω_{ik} sont les tenseurs fondamentaux interne et externe, T_{ik} et U_{ik} les tenseurs d'impulsion-énergie matérielle et électrique, les quantifications correspondantes sont liées par les relations

$$(*) \quad T_{ik}^{(lm)} = \frac{1}{4} T^{(l)} g_{ik}^{(lm)}; \quad U_{ik}^{(lm)} = \frac{1}{4} U^{(l)} \omega_{ik}^{(lm)}$$

où $l = 1$ pour les états sans rayonnement et $l = 2$ pour les états de rayonnement, l'indice m servant à distinguer les états quantiques de chacune des classes. A partir de (*) et des équations fondamentales de sa théorie unitaire, l'A. retrouve en particulier le potentiel scalaire de L. de Broglie.

Lichnerowicz (Paris).

Gião, Antonio: Sur la quantification du champ métrique et les interactions particules-champs. II. Application aux champs magnétique et nucléaire. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 434—436 (1950).

L'A. applique la même méthode que dans sa précédente note [voir réferat précédent] à l'étude du champ nucléaire et du champ magnétique. En particulier l'énergie W_0 du champ nucléaire d'une particule est, dans le cas statique,

$$W_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{(m_0)_e c^2}{e} \right)^2 |\vec{B}_g|^2 \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{4(\xi_1 + \xi_2)}$$

où les notations proviennent de celles de L. de Broglie (ce Zbl. **34**, 426, 427), ce qui est en accord avec les résultats de celui-ci. Un résultat analogue est établi pour l'énergie du champ électromagnétique.

Lichnerowicz (Paris).

Gião, Antonio: Sur la quantification du champ métrique et les interactions particules-champs. III. Systèmes de particules. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1740—1742 (1950).

L'A. applique ses résultats de deux Notes précédents (voir réferats précédents) pour obtenir des expressions des tenseurs métriques quantifiés d'un système de particules. On notera que les moyennes quantiques $\langle (g_{ik})_{\nu} \rangle$ et $\langle (\omega_{ik})_{\nu} \rangle$ des champs métriques de la particule ν restent finies pour la distance spatiale r_{ν} tendant vers zéro. De ces expressions, il résulte que le champ newtonien est dû à l'interaction des particules tandis que le champ coulombien présente le double aspect d'un champ d'interaction et d'un champ propre à chaque particule.

Lichnerowicz (Paris).

Gião, Antonio: Sur la quantification du champ métrique et les interactions particules-champs. IV. Application au spectre de l'hydrogène. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1838—1840 (1950).

En introduisant, dans les équations de Dirac de l'électron, les potentiels quantifiées calculés dans les notes antérieures de l'A. (voir référats précédents), on montre que la structure hyperfine du spectre de l'hydrogène peut être traitée comme une petite perturbation de l'énergie propre de l'électron due à son interaction avec les champs propres non coulombiens du proton.

Lichnerowicz (Paris).

Bau der Materie:

● Wagner, K. W. (Herausgeber): Das Molekül und der Aufbau der Materie. — Vorträge von W. Kossel, F. Hund, E. Justi, O. Kratky und P. A. Thiessen. (Die Wissenschaft, Band 101.) Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn, 1949, VII, 319 S.; 18,80 DM.

Das vorliegende Buch enthält eine Reihe von Vorträgen, die im Winter 1943/44 an der Berliner Technischen Hochschule gehalten wurden. In vier Vorträgen behandelt zunächst W. Kossel in sehr anschaulicher Weise die Grundtatsachen des Atombaus, der Ionenbindung und der Wachstums- und Abbauprozesse bei Kristallen. Anschließend berichtet F. Hund in mehr mathematischer Weise über die Grundbegriffe der Quantentheorie und ihren Einfluß auf die Struktur der Atome, Moleküle und festen Körper. In zwei weiteren Vorträgen werden von E. Justi die aus der Molekülstruktur zu gewinnenden kalorischen Daten bei Gasen (spezifische Wärmen, Reaktionswärmen) und deren Einfluß auf die thermische Zustandsgleichung besprochen. Und schließlich werden in den beiden letzten Vorträgen die wichtigsten Eigenschaften von Makromolekülen durch O. Kratky und von Kolloiden durch P. A. Thyssen gebracht.

F. Sauter (Göttingen).

Bethe, H. A.: Bemerkungen über die Wasserstoff-Eigenfunktion in der Diracschen Theorie. Z. Naturforsch. 3a, 470—477 (1948).

In Zusammenhang mit der Theorie der Lamb-Retherford-Verschiebung entsteht die Aufgabe, Mittelwerte einiger Operatoren (V , E_{kin} , β) für die Eigenfunktionen der Diracschen Theorie des H-Atoms zu berechnen. Verf. benutzt dazu die Eigenfunktionen im Impulsraum, nachdem er zuerst den Virialsatz der Diracschen Theorie auf einfache Weise hergeleitet hat. Ohne Benutzung expliziter relativistischer Eigenfunktionen gelingt es dann, solche Mittelwerte bis zu Größen von der Ordnung der Feinstruktur zu bestimmen.

Kockel (Leipzig).

Breit, G., G. E. Brown and G. B. Arfken: The effect of nuclear motion on the hyperfine structure of hydrogen. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1299—1304 (1949).

Verff. gehen aus von der Breitschen Differentialgleichung des Systems Proton-Elektron. Sie bestimmen die Hyperfeinstruktur in der Ordnung $\alpha^2 \cdot m/M$ [Energie = Ry $(1 + a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha^4 + \dots + b_1 \alpha^2 \cdot m/M + \dots)$]. Der nächste Term von der Ordnung $\alpha^4 \cdot m/M$ hängt von der Größe des „Protonradius“ und der Abänderung der Coulombenergie im „Inneren des Protons“ ab, bleibt also unsicher.

Kockel.

Brown, G. E. and G. B. Arfken: Effects of the proton radius on nuclear motion correction for the hyperfine structure of hydrogen. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1305—1306 (1949).

Die Annahme eines endlichen Protonenradius ändert die potentielle Energie und damit die Eigenfunktion des Wasserstoff-Grundzustands. Da der Radius und das Potential im Innern des Protons nicht bekannt sind, ergeben sich Unsicherheiten in der relativen Größenordnung $\alpha^2 m/M$ für die Hyperfeinstruktur (s. vorsteh. Referat).

Kockel (Leipzig).

Breit, G., G. B. Arfken and W. W. Clendenin: Spectroscopic isotope shift and nuclear polarization. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 78, 390—406 (1950).

Für eine Abschätzung der Hyperfeinstrukturaufspaltung betrachten die Verff. ein Atommodell mit einem Elektron und einem polarisierbaren Kern, der in einem Grundzustand und einem angeregten Zustand existieren kann. Innerhalb des Kerns wird das Potential auf das Elektron, ebenso wie das Störglied, als konstant angenommen. Die auf die Diracsche Wellengleichung angewandte Störungsrechnung gestattet unter der üblichen Voraussetzung, daß das Kernvolumen zum Atomgewicht proportional ist, eine Berechnung der Energieänderung. Die Berücksichtigung der Elektronendichte im Außengebiet gestattet eine Verfeinerung der Energieabschätzung für $s_{\frac{1}{2}}$ - und $p_{\frac{1}{2}}$ -Elektronen. Schließlich wird die Energieänderung mit Hilfe einer Zerlegung in Legendresche Polynome noch aufgespalten in einen Pol- und einen Dipolanteil. Dabei erweist sich dieser als wahrscheinlich vernachlässigbar, während der Polanteil, der durch die Kernanregung bedingt ist, von der Größenordnung der beobachteten Linienverschiebungen ist. Der Sprung in der Linienverschiebung beim Übergang von geraden zu ungeraden Isotopen kann aus der benutzten Polarisationsdeutung plausibel gemacht werden. Möglicherweise sind die nach der Theorie des Kernvolumeneinflusses zu kleinen Beobachtungswerte der Isotopenaufspaltung aus einer teilweisen Kompensation des Volumeffektes durch die Polarisation zu verstehen.

Kratzer (Münster).

Pluvinae, Ph.: Fonction d'onde approchée à un paramètre pour l'état fondamental des atomes à deux électrons. Ann. Phys., Paris, XII. S. 5, 145—152 (1950).

Zur näherungsweise Berechnung der Energie im Grundzustand eines Atoms mit zwei Elektronen wird die Wellenfunktion als Produkt von zwei Wellenfunktionen des nS -Zustandes des Einelektronenproblems für die beiden Elektronen und einer unbekannten Funktion des gegenseitigen Elektronenabstandes angesetzt. Diese muß einer Gleichung genügen, die als Wellengleichung eines Stoßvorganges zwischen den beiden Elektronen gedeutet werden kann. Die stetig veränderliche Wellenzahl dieser Stoßgleichung geht als Parameter in die Lösungsfunktion ein, die sich durch eine konfluente hypergeometrische Funktion darstellen läßt. Nach dem Ritzschen Verfahren wird der Parameterwert bestimmt, bei dem der Eigenwert ein Minimum ist. Die numerische Auswertung gibt Energiewerte, deren Differenz gegen die beobachteten Werte etwas kleiner ist als bei der zweiten Näherung von Hylleraas.

Kratzer (Münster).

Biermann, Ludwig und Eleonore Trefftz: Wellenfunktionen und Übergangswahrscheinlichkeiten der Leuchtelektronen des Atoms Mg. I. 1. Teil. Z. Astrophys. 26, 213—239 (1949).

Es wird den Berechnungen die Variationsmethode von Fock zugrunde gelegt: Stationarität der Gesamtenergie eines Zustandes gegenüber Variation der Wellenfunktionen. Dem Ausdruck für die Gesamtenergie als Summe aus Rumpfenenergie, Wechselwirkung der Leuchtelektronen mit dem Kern, Coulombsche und Austausch-Wechselwirkung der Elektronen untereinander, wird ein Polarisierungsterm angefügt und damit die Übereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Energiewerten verbessert. Die Polarisierbarkeit wird aus den $4f$ -Termen bestimmt. Die ausreichende Erfüllung der Orthogonalität der Funktionen wird abgeschätzt. Beschreibung der Rechenmethodik und Tabellen für die normierten Wellenfunktionen der Zustände $(3s, 3s) {}^1S$, $(3s, 3p) {}^1P$, $(3s, 3p) {}^3P$, $(3s, 3d) {}^3D$, $(3s, 4f) {}^3F$ und für die Oszillatorenstärken der Linien $3 {}^1S - 3 {}^1P$, $3 {}^3P - 3 {}^3D$ und $3 {}^3D - 4 {}^3F$.

Burkhardt (Weil/Rhein).

Trefftz, Eleonore: Wellenfunktionen und Übergangswahrscheinlichkeiten der Leuchtelektronen des Atoms Mg I. 2. Teil. Z. Astrophys. 26, 240—263 (1949).

In Erweiterung der Rechnungen des ersten Teiles werden hier solche Zustände berechnet, die durch andere Zustände gleicher Multiplizität, gleichen Drehimpulses,

gleicher räumlicher Orientierung desselben und gleichen Symmetriecharakters, aber mit anderen Elektronenkonfigurationen gestört werden. Dazu gehören die $(3s, nd)^1D$ -Zustände, die durch $(3p, 3p)^1D$ gestört werden und der Grundzustand $(3s, 3s)^1S$, beeinflusst durch $(3p, 3p)^1S$. Berücksichtigung dieser Störungen ergibt sehr gute Übereinstimmung dieser Terme mit den Beobachtungen. Auch die Oszillatorenstärken werden z. T. dadurch stark beeinflusst. Tabellen für Oszillatorenstärken von einer Reihe von Linien und für die ungestörten Wellenfunktionen der Zustände $(3s, nd)^1D$, $(3s, 4f)^1F$, $(3s, 4s)^3S$, $(3p, 3p)^1D$, $(3p, 3p)^1S$ und $(3p, 3p)^3P$.

Burkhardt (Weil/Rhein).

McWeeny, R.: Gaussian approximations to wave functions. *Nature*, London **166**, 21—22 (1950).

In *Proc. R. Soc. London A* **200**, 542—554 (1950) schlägt Boys vor, bei der Berechnung von Atom- und Moleküleigenfunktionen als variierbare Approximationen Produktaggregate von Funktionen der Form $x^l y^m z^n \exp(-\alpha r^2)$ zu benutzen, da dann die Integrationen bei den Störungsrechnungen ausführbar sind. Verf. stellt fest, daß er bereits in seiner Dissertation (Oxford 1948) aus dem gleichen Grunde solche Gaußsche Verteilungsfunktionen benutzt hat. Als weiteren Vorteil der Verwendung Gaußscher Funktionen betont er, daß dabei die Wellenfunktionen im Lagen- und im Impulsraum die gleiche Gestalt haben und daß auch Coulombsche und Yukawa-Potentiale sich im Impulsraum bequem durch Gaußsche Funktionen ausdrücken lassen. Für Einkörper-Wellenfunktionen erweist sich die Methode als sehr zweckmäßig. Dabei ist es vorteilhaft, die Basisfunktionen aus mehreren Hermite-schen Folgen zu wählen; von den beiden Ansätzen

$$\psi(1s) = \varrho_1 \exp(-\alpha r^2) + \varrho_2 r^2 \exp(-\alpha r^2) + \dots$$

und

$$\psi(1s) = \varrho_1 \exp(-\alpha_1 r^2) + \varrho_2 \exp(-\alpha_2 r^2) + \dots$$

ist der zweite wesentlich günstiger. Der Grund hierfür ist, daß die exakte Lösung für große Umpulse p sich wie $1/p^4$ verhält, während der erste Ansatz für beliebig viele Glieder zu $\exp(-S \dot{p}^2)$ proportional ist. Die gute Konvergenz des zweiten Ansatzes zeigt der Verf. an dem Zahlenbeispiel des $1s$ - und $2p$ -Zustandes eines wasserstoffähnlichen Atoms, wo bereits mit 2 Gliedern der Energieeigenwert bis auf 2,8 und 1,3% richtig dargestellt wird. Während für He und H_2^+ die Methode ebenfalls aussichtsreich erscheint, machen alle molekularen Aufgaben wahrscheinlich einen Ansatz mit sehr großer Gliederzahl notwendig.

Kratzer (Münster).

Singh, R. P.: Relativistic Thomas-Fermi atom. *Indian J. Phys.* **24**, 19—22 (1950).

Verf. gibt eine relativistische Verallgemeinerung der Thomas-Fermi-Gleichung für die Bestimmung der Elektronendichte-Verteilung in einem Atom, die für das Studium des inneren Zustandes der überdichten „weißen Zwergsterne“ von Wichtigkeit sein dürfte.

H. Vogt (Heidelberg).

Koppe, Heinz: Streuquerschnitt von Atomen für unelastische Streuung schneller Elektronen. *Z. Phys.*, Berlin **124**, 658—664 (1948).

Die Streuung von Elektronen an Atomen interessiert in der elektronenmikroskopischen Praxis, insbesondere bei kleineren Streuwinkeln. Ältere Rechnungen von Heisenberg (1931) auf Grund des Thomas-Fermi-Modells versagen hier. *Zur Verbesserung wird nach dem Vorgehen von Heisenberg die gemischte Dichte eingeführt; ein den Wirkungsquerschnitt bei kleinen Geschwindigkeiten bestimmendes Integral hierüber hängt ziemlich stark vom Verhalten des Thomas-Fermi-Feldes bei großen Radien ab, wo dieses Feld mit der Wirklichkeit am schlechtesten übereinstimmt. Verf. bemerkt, daß das gleiche Integral in der Berechnung der magnetischen Suszeptibilität auftritt, so daß an Stelle des Integrals der empirische Wert der letzteren eingeführt werden kann. Für größere Geschwindigkeiten wird das

Heisenbergsche Resultat übernommen. Eine im Gesamtbereich gültige einfache Überschlagsformel wird angegeben. Für Ionen sollte die Methode nur geringe Korrekturen erfordern, für Metalle ist sie nicht anwendbar, da die Streuung an den Leitungselektronen nicht richtig wiedergegeben wird. *Flügge* (Marburg).

Margenau, H.: Inversion frequency of ammonia and molecular interaction. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1423—1429* (1949).

Da beim Ammoniakmolekül (Pyramide) zwei durch Inversion auseinander hervorgehende, energetisch gleichwertige Zustände möglich sind, muß durch Austausch-entartung eine Aufspaltung auftreten, deren Energiedifferenz durch die Resonanzfrequenz bestimmt ist. Die Wechselwirkung von zwei Dipolmolekülen aufeinander ergibt eine weitere Aufspaltung und demgemäß zwei Inversionsfrequenzen, deren Betrag und Wahrscheinlichkeit mit dem Molekülabstand sich ändert. Dabei wächst die relative Intensität der kleineren Frequenz auf Kosten derjenigen der größeren mit abnehmendem Abstand. Dieses Ergebnis wird rechnerisch aus dem Störungsproblem für zwei lineare ruhende und rotierende Moleküle gewonnen. Bei drei Molekülen ergibt sich unter vereinfachenden Annahmen über ihre gegenseitige Lage das Auftreten von drei Frequenzen, von denen wieder diejenige, deren Betrag kleiner ist als im ungestörten Falle, mit abnehmendem Molekülabstand an Intensität zunimmt. In jedem Falle ergibt also die Rechnung eine Abnahme der beobachtbaren mittleren Inversionsfrequenz mit wachsendem Druck. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung ist überraschend gut bis zu Drucken von einer Atmosphäre, bei höheren Drucken ist sie nicht mehr befriedigend. *Kratzer* (Münster).

Nielsen, Harald H.: A note on the centrifugal stretching in axially symmetric molecules. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 78, 415—416* (1950).

Verf. berechnet für mehratomige axialsymmetrische Moleküle die Glieder zweiter Ordnung im Hamiltonschen Operator, die aus der Deformationsfähigkeit der Moleküle entspringen, und bestimmt daraus störungstheoretisch die Änderung der Energieeigenwerte. Bei einer Schwingung senkrecht zur Figurenachse verändern die Corioliskräfte die Trägheitsmomente derart, daß Energieänderungen von der gleichen Größenordnung auftreten wie bei der Deformation durch die Zentrifugalkräfte. Sie gehen mit der dritten Potenz der Rotationsquantenzahlen und äußern sich in einer meßbaren Änderung der Aufspaltung in Abhängigkeit von den Oszillationsquantenzahlen. *Kratzer* (Münster).

Bonino, Giov. Battista e Eolo Scrocco: Indici di legame e spettri di oscillazione nelle molecole poliatomiche. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 421—428* (1949).

Grad, Harold: On the kinetic theory of rarefied gases. *Commun. pure appl. Math., New York 2, 331—407* (1949).

Gegenstand der Arbeit ist die kinetische Gastheorie eines einatomigen Gases mit einer Komponente und ihre Durchführung mittels der Boltzmannschen Fundamentalgleichung und des Stoßzahlansatzes. Sie setzt sich kritisch mit den in dieser Theorie gemachten Grundannahmen auseinander und zeigt einen neuen Weg, um zu höheren Näherungen für die Lösung der Boltzmannschen Fundamentalgleichung zu gelangen. Während die bisherigen höheren Näherungen, auch wenn man sie beliebig weit treibt, nur die thermodynamischen Begriffe enthalten und so nur einen kleinen Teil der Mannigfaltigkeit von Lösungen der Boltzmannschen Fundamentalgleichung approximieren, wird hier eine Folge von Näherungen angegeben, welche wesentlich allgemeiner sind. Die leitende Idee ist, die molekulare Verteilungsfunktion im Phasenraum als Funktion der Geschwindigkeit in Hermite'sche Orthogonal-funktionen von drei Veränderlichen zu entwickeln und diese Entwicklung an einer bestimmten Stelle abzubrechen; die Entwicklungskoeffizienten werden als Zustandsvariable gewählt; die thermodynamischen Variablen kommen in der Gewichtsfunktion vor, welche diese Polynome definiert, und sind stets in den Zustands-

variablen enthalten. Die ersten Koeffizienten sind im wesentlichen die Spannungen und der Wärmestrom; sie spielen also hier die Rolle unabhängiger Variablen mit eigenen Anfangswerten und eigenen Differentialgleichungen. Insbesondere existiert keine universelle Beziehung, welche die Spannungen und den Wärmestrom durch die thermodynamischen Variablen und ihre Gradienten beliebiger Ordnung ausdrückt. — Die Entwicklung bis zu den Hermiteschen Polynomen dritten Grades wird eingehend untersucht und die zugehörigen makroskopischen Gleichungen, welche die üblichen aerodynamischen Gleichungen verallgemeinern, werden aufgestellt; sie stellen ein in sich geschlossenes Gleichungssystem dar und enthalten beispielsweise die Relaxationen der Spannungen und des Wärmestroms aber auch den unter besonderen Bedingungen gültigen Zusammenhang zwischen Spannungen und Wärmestrom einerseits, den Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten bis zur zweiten Ordnung andererseits. Die Proportionalität des Wärmestroms mit dem Temperaturgradienten gilt nur mehr unter besonderen Bedingungen. — Die Charakteristiken und die Grenzbedingungen dieses erweiterten Systems von Differentialgleichungen werden ausführlich untersucht. In dieser Näherung wird auch das *H*-Theorem formuliert, welches aber hier nicht für die Gleichgewichtsentropie, sondern für einen verallgemeinerten Ausdruck gilt. — Der Anhang enthält u. a. die Berechnung der speziellen Lösungen der Boltzmannschen Fundamentalgleichung, deren Geschwindigkeitsverteilung an jeder Stelle eine Maxwell'sche ist, mathematische Ergänzungen und eine Abschätzung der Genauigkeit der durchgeführten dritten Näherung.

J. Meixner (Aachen).

Waldmann, Ludwig: Zur Theorie des Lorentz'schen Gasmischs. *Z. Naturforsch.* 5a, 322—327 (1950).

Als Lorentz'sches Gasmisch bezeichnet man eine Mischung von vielen schweren und wenigen leichten Atomen. Da sich für ein solches Gemisch nach Lorentz die Boltzmann'sche Stoßgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung der leichten Gas-Komponente (bei Vernachlässigung der Rückwirkung der Zusammenstöße von leichten Teilchen mit schweren auf die Verteilung der letzteren und bei Vernachlässigung der Zusammenstöße der leichten Teilchen untereinander) für eine beliebige Wechselwirkung zwischen leichten und schweren Teilchen lösen läßt, kann man auch die Koeffizienten der Diffusion D_{12} und der durch die leichte Komponente bedingten zusätzlichen Wärmeleitung λ_1 , sowie den Thermo-diffusionsfaktor α berechnen. Zwischen diesen drei Koeffizienten bestehen die beiden Beziehungen

$$\alpha = (\partial \ln D_{12} / \partial \ln T)_p - 2, \quad \lambda_1 = n_1 D_{12} k(5/2 + d(\alpha T)/dT),$$

wobei n_1 die Teilchendichte der leichten Komponente bedeutet.

F. Sauter.

Allis, William, P.: An error in a paper by Landau on Coulomb interactions in a plasma. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 146 (1949).

Verf. glaubt, L. Landau [*Physik. Z. Sowjetunion* 10, 154 (1936)] Fehler in der Herleitung der Wechselwirkungsgleichungen bei Coulombschen Kräften nachweisen zu können. Die Richtigkeit der Gleichungen wird jedoch überzeugend in einer Erwiderung Landaus [*Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 567 (1949)] bewiesen.

Fricke (Hamburg).

Denisse, J. F.: Emissions radioélectriques d'origine purement thermique dans les milieux ionisés. *J. Phys. Radium* 11, 164—171 (1950).

Die Emission radiofrequenter Wellen in einem ionisierten Medium in thermischem Gleichgewicht wird nach der Kramers'schen Theorie der Elektronenbremsstrahlung berechnet; dabei wird die von den äußeren Bedingungen abhängige Form des *g*-Faktors diskutiert (Dichteabhängigkeit, Beziehung zum quantenmechanischen Wert). Außerdem folgt die Emission nach dem Kirchhoffschen Satz aus dem Absorptionskoeffizienten, der nach der Lorentz'schen Stoßdämpfungstheorie berechnet

wird. Einfluß des Brechungsindex auf Emission und Absorption. Diskussion der Emission von Elektronen im Magnetfeld. Die Rechnungen und Ergebnisse stehen mit einer Reihe kürzlich erschienener Arbeiten anderer Autoren über das gleiche Gebiet in Einklang.

Burkhardt (Weil/Rhein).

Christov, St. G.: Über die Quantenmechanik der elektrochemischen Polarisation der Metalle. C. r. Acad. Bulgare Sci. 1, Nr. 1, 43—46 (1948).

Zur Erklärung der elektrochemischen Polarisation (Überspannung) nimmt Verf. in üblicher Weise an, daß ein Ion der Lösung einen Potentialberg überwinden muß, um an eine Wachstumstelle auf der Metalloberfläche zu gelangen. Aus dieser Vorstellung errechnet Verf. die Wachstumsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur und der angelegten elektrischen Feldstärke, indem er den Potentialberg durch eine rechteckige Potentialschwelle idealisiert. Die Schlußformel wird für verschiedene Grenzfälle diskutiert, doch werden keine Zahlenwerte etwa für die Höhe der Schwelle oder dgl. angegeben, und kein unmittelbarer Vergleich mit experimentellen Ergebnissen gezogen.

F. Sauter (Göttingen).

Kochendörfer, Albert und Alfred Seeger: Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. I. Periodisch angeordnete Versetzungen. Z. Phys., Berlin 127, 535—550 (1950).

Die Arbeit behandelt Versetzungen im linearen Fall, d. h. in einer elastisch gekoppelten Atomreihe, die sich in einem zeitlich konstanten und räumlich periodischen Potential bewegt. Verff. erweitern die Arbeit von Frenkel und Kontorova auf den Fall, daß die Periode des Potentials nicht mit dem Ruhabstand in der Atomreihe ohne Potential übereinstimmt, in der Absicht, damit die Verhältnisse bei plastisch inhomogen verformten Kristallen zu beschreiben (Verbiegung der Gleitebenen). In Teil I werden die Lösungen für periodische Versetzungsanordnungen angegeben und diskutiert. Bei der mathematischen Durchführung wird die Atomreihe als Kontinuum behandelt.

Leibfried (Göttingen).

Read, W. T. and W. Shockley: Dislocation models of crystal grain boundaries. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 78, 275—289 (1950).

Das bereits früher von den Verff. [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 692—693 (1949)] diskutierte Modell, nach dem die Korngrenzen Versetzungsstruktur besitzen, wird in Einzelheiten untersucht. Die möglichen Versetzungsanordnungen werden beschrieben. Für die Korngrenzenenergie kubischer Kristalle ergibt sich mit Hilfe der zweidimensionalen Elastizitätstheorie $E = E_0 \theta (1 - \ln \theta / \theta_m)$, wo θ den Winkel zwischen den Korngrenzenflächen bezeichnet, θ_m den Wert bei der maximalen Energie, der von der (elastizitätstheoretisch unbestimmten) Energie im Mittelpunkt der Versetzungen abhängt und experimentell bestimmt werden muß, und E_0 eine durch die Versetzungsstruktur bestimmte Funktion der elastischen Konstanten. Unter der Annahme isotroper elastischer Verhältnisse ergibt sich (bis auf einen mit der Orientierung der Korngrenzen etwas veränderlichen Faktor der Größenordnung 1 $E_0 = Ga/4\pi(1 - \nu)$, wo G den Schubmodul, a die Gitterkonstante und ν die Poissonsche Zahl bezeichnen. [Bezüglich der Berechnung von E_0 unter Berücksichtigung der elastischen Anisotropie vgl. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 78, 350 (1950).] Nach den Messungen der Abhängigkeit $E = E(\theta)$ von Dunn und Lionetti [Trans. A. I. M. E. 185, 125 (1949)] ist in guter Näherung E tatsächlich eine lineare Funktion von $\theta \ln \theta$, wobei sich $\theta_m \sim 25^\circ$ und $E_0 \sim 400\text{--}600 \text{ erg/cm}^2$ ergibt. Auch die Beobachtungen von Lacombe (Rep. Brist. Conf. Phys. Soc., London 1948) über die zu „Adern“ verbundenen feinen Ätzfiguren längs der Korngrenzen wenig verschieden orientierter Körner ($\theta \sim 0,075^\circ$) führen auf den theoretisch zu erwartenden Wert des Abstandes der Versetzungen ($\sim 10^{-4} \text{ cm}$), wenn angenommen wird, daß jede Versetzung zu einer Ätzfigur Anlaß gibt. Zur Erklärung des von Zener und Kê beobachteten sogenannten amorphen Korngrenzenfließens wird die Dynamik des Modells untersucht und in diesem Zusammenhang eine Möglichkeit diskutiert, wie an den Kornecken durch Bewegung der Korngrenzen wanderungsfähige Versetzungen gebildet werden können.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Runge, Iris: Zum Ordnungsproblem in Mischkristallen. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 7, 129—146 (1950).

Im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen über den Ordnungszustand in Mischkristallen, die von vornherein den Gleichgewichtszustand als den Zustand größter Wahrscheinlichkeit ins Auge fassen, wird das Problem dynamisch ange-

griffen und die Übergänge verschiedener Zustände ineinander untersucht. Als vereinfachtes Bild wird ein zweidimensionales Gitter mit der Zusammensetzung 1:1 betrachtet. Nach dem Vorgehen von van der Waerden werden die richtig geordneten Bereiche durch polygonartige Grenzlinien längs der fehlgeordneten Atome voneinander getrennt und die Veränderungen derselben durch die möglichen Platzwechsel je zweier Atome untersucht. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Platzwechsels wird dann nach Bethe angenommen, daß nur nächste Nachbarn miteinander in Wechselwirkung stehen (Fehlorderungsenergie V), wodurch die Zahl der Platzwechsel mit verschiedenem Energieaufwand endlich wird und die möglichen Änderungen der Polygonzüge (es besteht eine Verkürzungstendenz) und ihre Wahrscheinlichkeit nach dem Boltzmannschen Prinzip berechnet werden können. Für tiefe Temperaturen [$x = \exp(-V/kT) \ll 1$] wird dann die Zahl der Polygonarten bis zu 10 Polygonseiten (je von der Größe eines Atomabstandes) und die gesamte Fehlorderungsenergie als Reihe mit geradzahligem Potenzen von x berechnet, wobei höhere als 10-te Potenzen vernachlässigt werden. Die erhaltenen Zahlenfaktoren weichen für x^8 und x^{10} etwas von den von van der Waerden berechneten ab, was aber bei kleinen x ohne wesentliche Bedeutung ist. Es wird näher ausgeführt, daß bei tiefen Temperaturen eine für das ganze Gitter einheitliche Ordnung zu erwarten ist, wenn von höheren Temperaturen abgekühlt wird. Auf die bei dreidimensionalen Gittern zu erwartenden qualitativ gleichartigen Verhältnisse wird hingewiesen.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Cowley, J. M.: An approximate theory of order in alloys. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 669—675 (1950).

In üblicher Weise werden die Nahordnungsparameter α_i für die verschiedenen Abstandssphären i und der Fernordnungsparameter S definiert und gezeigt, daß $S \neq 0$ ist, wenn α_i für große i einen endlichen Grenzwert besitzt. Der Zusammenhang zwischen diesem und S hängt von der Gitterstruktur ab. Zur Berechnung des Temperaturverlaufs der α_i und von S wird die freie Energie F benutzt. Die Konfigurationsenergie ergibt sich als Bilinearform der α_i mit den mittleren Energieänderungen $V_{ij} = V_m$ ($m = |i - j|$) beim Ersetzen zweier gleicher Atome in den Sphären i und j durch ungleiche Atome, der Entropieanteil hat die übliche Form. Zur Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen $\delta F = 0$ wird angenommen, daß die $\delta\alpha_i$ voneinander unabhängig sind, was nur in erster Näherung zulässig ist. Durch Übergang zu großen i ergibt sich aus diesen Gleichungen der Temperaturverlauf des Fernordnungsparameters S , durch dessen Verschwinden die kritische Temperatur T_k bestimmt ist. Zur numerischen Auswertung der Gleichungen für Cu_3Au wird angenommen, daß alle $V_m = 0$ sind für $m > 2$ (Wechselwirkung bis zu übernächsten Nachbarn) und alle $\alpha_i = 0$ für $i > 5$, außerdem wird $V_2 = -V_1/10$ gesetzt. Der so erhaltene Temperaturverlauf der α_i und von S stimmt gut mit dem aus neueren Röntgenbefunden des Verf. (J. appl. Phys., im Druck) ermittelten Verlauf überein, im allgemeinen besser, als nach den bekannten Näherungen von Bethe, Bragg und Williams, Peierls und Kirkwood. Insbesondere der rasche Abfall der spezifischen Wärme beiderseits T_k wird wesentlich besser wiedergegeben. Theoretisch ergibt sich eine unendliche spezifische Wärme bei T_k (Unstetigkeiten der Ordnungsparameter) ohne latente Wärme (stetiger Energieverlauf). Die Bestimmung der Ordnungsparameter für beliebige Zusammensetzung in Systemen wie CuAu wird diskutiert und qualitative Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden erhalten. Verf. weist insbesondere darauf hin, daß seine Theorie unmittelbar zu experimentell prüfbar Ergebnissen führt, während dies für die bisher durchgeführten strengen Rechnungen (C. Domb, dies. Zbl. 35, 286; Kaufmann-Onsager, dies. Zbl. 35, 428) nicht zutrifft.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Kockel, B.: Ordnungs-Unordnungs-Umwandlungen. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 7, 18—32 (1950).

In den bisherigen Theorien der Ordnungs-Unordnungsumwandlungen (Bethe, Bragg und Williams) konnte der rasche Abfall der spezifischen Wärme beiderseits der kritischen Temperatur, insbesondere oberhalb derselben, nur durch einen Einfluß des Fernordnungsgrades erklärt werden. Es wird gezeigt, daß es nicht möglich ist, dieses Verhalten zu erklären, wenn man sich nur auf die Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn beschränkt, die unabhängig ist von den ferneren Nachbarn und der sonstigen Anordnung der Atome in der Legierung. Zu diesem Zweck

wird die Konfigurationsenergie in bekannter Weise durch die Zustandssumme ausgedrückt. Die darin auftretende Verteilungsfunktion war bisher nur für lineare Ketten bekannt. Sie wird nun, ausgehend von einer Abzählung für das quadratische Gitter, bei dem sie sich gut durch eine Fehlerfunktion darstellen läßt, unter Benutzung dieser Funktion für allgemeinere ebene und räumliche Gitter näherungsweise berechnet. In allen Fällen wird das genannte Ergebnis bestätigt. Dagegen ist es mit Hilfe obiger Voraussetzung möglich, die Ergebnisse der Weisschen Theorie des Ferromagnetismus zu erhalten, ohne daß man, wie Becker und Döring es getan haben, alle Atome als Nachbarn voneinander ansieht. *A. Kochendörfer (Stuttgart).*

Belov, N. V.: Diamantene Symmetrieebenen und Darstellung derselben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 59, 701—702 (1948) [Russisch].

Unter „diamantenen“ Symmetrieebenen werden die in der Raumgruppe des Diamanten ($O_h^4 - Fd3m$) parallel (100) vorhandenen Scharen $C_s^4 Fd$ verstanden. Es wird eine neue Bezeichnung derselben vorgeschlagen, welche in einem in der USSR herauskommenden Tabellenwerk der 230 Raumgruppen angewandt werden soll. (Nach deutscher Übersetzung referiert.) *W. Nowacki (Bern).*

Belov, N. V.: Neue Strukturtypen mit dichtester Packung der zusammensetzenden Atome. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 677—679 (1949) [Russisch].

Verf. hat in seinem Buche „Die Struktur der Ionenkristalle und metallischen Phasen“ (Moskau-Leningrad, 1947) eine Struktursystematik vorgeschlagen, deren Grundprinzip in der dichtesten Packung der großen Ionen (Anionen) besteht. In der Arbeit wird gezeigt, daß sich die neuen Strukturbestimmungen an den Verbindungen der Transurane (Zachariasen) gut in diese Systematik einfügen. (Nach deutscher Übersetzung referiert.) *W. Nowacki (Bern).*

Kolmogorov, A. N.: Zur Frage der „geometrischen Auslese“ der Kristalle. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 681—684 (1949) [Russisch].

Im Falle einer unendlichen, durch eine horizontale Gerade von unten begrenzten Halbebene ist die Wahrscheinlichkeit, wonach ein beliebiger Kristall bis zur Höhe h wachsen kann, für große h durch die Formel (1) $P(h, \lambda) = c \sqrt{s/\lambda} h$ gegeben, mit $c = \text{const.}$, $s = \text{Zahl der Richtungen des maximalen Wachstums}$ ($s = 2$ bei Quadraten, $s = 1$ bei Rhomben, $\lambda = \text{mittlere Zahl der Kristallkeime pro Längeneinheit der die Halbebene begrenzenden Geraden}$). — Im räumlichen Fall (durch Horizontalebene begrenzter Halbraum) wird die zu (1) analoge asymptotische Formel ($h \rightarrow \infty$) $P(h, \lambda) = c'/\sqrt{\lambda} h$ ($c' = \text{const.}$, in komplizierter, exakt nicht zu berechnender Weise von der Kristallform abhängig). [Nach deutscher Übersetzung referiert.] *W. Nowacki (Bern).*

Belov, N. V. u. Bjelajev, L. M.: Kristallische Struktur des Ramsayits $\text{Na}_2\text{Ti}_2\text{Si}_2\text{O}_9$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 805—808 (1949).

Akulov, N. S. und Ja. I. Fel'dštejn: Eine Anwendung der Gruppentheorie zur Analyse der Anisotropie von Kristallen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 593—596 (1950) [Russisch].

In einem anisotropen (oder isotropen) Raum laufe ein Prozeß ab, der durch die lineare Beziehung $B = A C$ zweier Vektoren B und C dargestellt wird. Dabei ist A ein Tensor, welcher die Bedingung

$$T_k A(s) = \pm A(T_k s) \cdot T_k$$

erfüllt. Die T_k sind die Elemente der Gruppe, welche den Raum in sich selbst überführt (Deckoperationen). Es werden für kubische und hexagonale Kristalle die Anisotropiegesetze abgeleitet (nach deutscher Übersetzung ref.). *Nowacki.*

Lyons, James W.: Statistical theory of elementary processes of plastic deformation. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 413—414 (1948).

Es werden zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die Entstehung von Versetzungen in einer Ebene in Richtung und in Gegenrichtung der äußeren Spannung

angegeben und dann folgende Annahmen gemacht: Die Entstehungswahrscheinlichkeit für eine Versetzung ist eine Funktion der in der Ebene wirkenden Kraftkomponente und ist unabhängig von dem Richtungssinn der Kraft. Für die Gleitgeschwindigkeit ergibt sich dann auf Grund allgemeiner Funktionsgleichungen $d\varepsilon/dt = A \sinh B\tau$, wo A und B Konstanten sind und τ die Schubspannung bezeichnet. Diese Gleichung besitzt die von Nadai und Andern vorgeschlagene Form. Es wird darauf hingewiesen, daß durch die vorliegenden Betrachtungen ein Rahmen geschaffen wurde, in den mehr in Einzelheiten gehende Vorstellungen eingebaut werden können.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Leibfried, Günther: Über den Einfluß thermisch angeregter Schallwellen auf die plastische Deformation. Z. Phys., Berlin 127, 344—356 (1950).

Es wird angenommen, daß eine Versetzung gegenüber den Schallwellen einen von der Wellenlänge λ und der Richtung unabhängigen Wirkungsquerschnitt σ der Größe λ^2 besitzt (λ Gitterkonstante). Für die durch eine Schallwelle mit dem Schubspannungsverlauf $\tau = \tau_0 \cos(\kappa x - \omega t)$ auf eine ruhende Versetzung ausgeübte mittlere Kraft K_0 ergibt sich unter Benutzung des Zusammenhangs zwischen Kraft und Schubspannung sowie zwischen gestreuter Energie und Wirkungsquerschnitt: $K_0 = \kappa \sigma A \tau_0^2 / 4\pi G$ und für eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Versetzung: $K = K_0 - \kappa \sigma v \tau_0^2 / 2\omega G$. Dabei bezeichnet G den Schubmodul. Durch Summation über alle angeregten Schallwellen erhält man die Reibungskraft $R = -\sigma(v/c_t)(\bar{\varepsilon}/10)$, wo ε die mittlere Energiedichte der elastischen Wellen angibt und c_t die Geschwindigkeit der Transversalwellen. Die maximale Geschwindigkeit v_m , welche eine Versetzung unter dem Einfluß einer äußeren Schubspannung τ_a annehmen kann, wird damit $v_m = c_t(\tau_a/\tau^*)$ mit $\tau^* = \varepsilon/10$. Zahlenmäßig wird z. B. für Aluminium $\tau^* = 7 \text{ kp/mm}^2$ und mit $\tau_a = 0,5 \text{ kp/mm}^2$: $v_m = 0,07 c_t$. Die Bewegungsgeschwindigkeit der Versetzungen ist also stets klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit, weshalb ein von F. C. Frank diskutierter Vorgang der Vervielfachung von Versetzungen nicht stattfinden kann. Die von den Schallwellen selbst erzeugte Schubspannung ist von der Größe $\tau' = 0,07G$, liegt also in der Nähe der sog. theoretischen Schubspannung τ_{th} von etwa $G/2\pi$. Definiert man die Schmelztemperatur T_S durch die Forderung, daß bei ihr $\tau' = \tau_{th}$ wird, so ergibt sich die Beziehung $G\lambda^3/kT_S = 95$, die praktisch mit der Lindemannschen Formel übereinstimmt.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Curien, Hubert: Diffraction des neutrons par les cristaux. Rev. sci., Paris 87, 222—227 (1950).

Kurzer Bericht.

Finkelstein, R. J.: Scattering of neutrons in polycrystals. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 72, 907—913 (1947).

Die bisher nicht durchgeführte Berechnung des Streuquerschnittes von Neutronen für unelastische Zusammenstöße höherer Ordnung (Mehrfachstöße), die unter Zugrundelegung des Debyeschen Modells der Gitterschwingungen sehr unübersichtlich werden würde, wird unter Zugrundelegung des Einsteinschen Modells (voneinander unabhängige Oszillatoren einer einzigen Frequenz) durchgeführt. Diese Stöße sind dann mit mehrquantigen Übergängen einzelner Oszillatoren verknüpft. Sie sind inkohärent, so daß die Streuintensitäten addiert werden können und der Streuquerschnitt eines Vielkristalls sich durch Mittelung über die Querschnitte der Kristallite ergibt. Das Wechselwirkungspotential wird durch eine Summe von δ -Funktionen mit verschiedenen Konstanten dargestellt. Die Ergebnisse stimmen erwartungsgemäß mit den von Fermi für amorphe Stoffe erhaltenen im wesentlichen überein, ausgenommen bei hohen Neutronenenergien, welche die Bindungsenergie wesentlich überschreiten, bei welchen Kerne aus dem Kristallverband herausgeworfen werden können. Der Impulsaustausch erfolgt dann vorwiegend zwischen den sto-

Benden Neutronen und den emittierten Kernen, für eine Impulsaufnahme durch das Gitter besteht nur eine geringe Wahrscheinlichkeit. Es werden auch die elastischen kohärenten Streuquerschnitte berechnet, die bei Energien der Größe 1 eV von Bedeutung sind. Sie stimmen im wesentlichen mit den nach dem Debyeschen Modell berechneten überein. Für den bei sehr langsamen Neutronen von Bedeutung werdenden Absorptionsquerschnitt versagt das Einsteinsche Modell. Die theoretischen Ergebnisse für den gesamten (elastischen + unelastischen) Streuquerschnitt sind in guter Übereinstimmung mit den an Beryllium erhaltenen Meßergebnissen.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Fano, U., H. Hurwitz jr. and L. V. Spencer: Penetration and diffusion of X-rays. V. Effect of small deflections upon the asymptotic behavior. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 425—426 (1950).

Die Berücksichtigung von Winkelablenkungen auf den asymptotischen Verlauf der Röntgenintensität erfordert, daß die Konstante k_0 in der früheren Formel $x^{k_0} \exp(-\mu_0 x)$ (s. dies. Zbl. 35, 280) durch den Eigenwert einer von Wieck angegebenen Gleichung ersetzt wird.

W. Glaser (Wien).

Hosemann, Rolf: Röntgeninterferenzen an Stoffen mit flüssigkeitsstatistischen Gitterstörungen. Z. Phys., Berlin 128, 1—45 (1950).

Es wird betont, daß man zur Deutung der Röntgendiagramme vieler Stoffe neben den bei Kristallen bisher betrachteten Gitterstörungen „1. Art“, welche Verrückungen der Bausteine (Atome, Moleküle) gegenüber bestimmten definierten Ideallagen angeben, auch Störungen „2. Art“ betrachten muß, die flüssigkeitsstatistischen Charakter besitzen und Verrückungen der Bausteinmittelpunkte (Streumassenschwerpunkte) gegenüber den Ideallagen beschreiben. Beide Arten von Störungen werden als unabhängig voneinander angenommen. Für die Störungen 2. Art wird in Erweiterung der früheren Untersuchungen für lineare Gitter (dies. Zbl. 35, 140), in denen gezeigt wurde, daß sich die gestreute Amplitude und Intensität durch die Laplacetransformierte der Statistiken der Gitterstrichdicke und ihrer Abstände ausdrücken läßt, gezeigt, daß im dreidimensionalen Fall dasselbe mit Hilfe der Fouriertransformierten der Baustein- und Abstandsstatistiken möglich ist. Der Gitterfaktor (erweiterter Strukturfaktor) läßt sich durch eine Gitterknotenfunktion im Fourierraum darstellen, deren Knoten den Gitterpunkten im reziproken Raum eines ungestörten Gitters entsprechen. Im Bereich der eigentlichen Reflexe sind die Knoten fast punktförmig und heben sich deutlich aus dem schwachen diffusen Untergrund heraus, im Bereich der sog. Flüssigkeitsinterferenzen erheben sie sich nicht mehr klar trennbar aus dem Untergrund und im reflexlosen Streubereich existiert praktisch nur noch der diffuse Untergrund. Eigentliche Gitterzellen bestehen nur im ersten Fall, im zweiten Fall sind sie stark verzerrt und teilweise nicht mehr definierbar und im dritten Fall sind sie undefinierbar. Die Theorie enthält die der ungestörten Kristalle (v. Laue, Ewald) und der einfachen Flüssigkeiten (Debye und Mehnke) als Grenzfälle, in denen die Knoten punktförmig bzw. sehr stark verwaschen sind. Das im eindimensionalen Fall gebrauchte Bild der Netzebenen als glatte bzw. mehr oder weniger stark aufgeraute Spiegel dient auch hier zur Veranschaulichung.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Butler, S. T.: The scattering of high energy charged particles by thin foils of matter. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 63, 599—605 (1950).

Bei der Streuung hochenergetischer geladener Teilchen an einer dünnen Folie hat die Winkelverteilung für hinreichend große Ablenkungswinkel nahezu dieselbe Form wie bei der Streuung an einem einzelnen Atom. Die Abweichungen rühren von einer großen Anzahl zusätzlicher Ablenkungen um kleine Winkel her. Die Verteilung wird durch eine rasch konvergierende Reihe dargestellt, deren erster Term mit der Formel für Einfachstreuung identisch ist, während die übrigen die

zusätzliche Vielfachstreuung beschreiben. Der Beitrag der letzteren ist um so kleiner, je dünner die Folie ist. Nimmt man als Winkeleinheit $\varepsilon \cdot \sqrt{\xi}$, wobei

$$\varepsilon^2 = \pi N d \left\{ \frac{2 Z Z' e^2}{M c^2 (E - 1/E)} \right\}^2 \quad \text{und} \quad \xi = \lg \frac{\theta_1}{1,82 \theta_0}$$

($\theta_0 = \hbar/a M C (E^2 - 1)^{1/2}$; $a = \hbar^2/m e^2 Z^3$ = Abschirmkonstante; θ_1 trennt die Gebiete, in denen Einfachstreuung bzw. Vielfachstreuung überwiegen. E = Gesamtenergie des Teilchens in Einheiten $M c^2$), so wird die Verteilung für $\theta \gtrsim 4 - 4,5$

$$f(\theta, d) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \frac{1}{\theta^4} \left(1 + \frac{8}{\theta^2} + \frac{72}{\theta^4} + \frac{768}{\theta^6} + \dots \right).$$

Der erste Term beschreibt dabei die Einzelstreuung, während die prozentuale Abweichung davon gegeben ist durch

$$100 \cdot \left(\frac{8}{\theta^2} + \frac{72}{\theta^4} + \frac{768}{\theta^6} + \dots \right).$$

Die entsprechende Formel für die projizierte Streuung wird auch noch abgeleitet. *Oehme* (Göttingen).

Hellwege, K.-H.: Der lineare Zeeman-Effekt in Kristallen. *Z. Phys.*, Berlin 127, 513—521 (1950).

Es wird der Zeeman-Effekt in Kristallen systematisch für alle 32 Punktsymmetrieklassen in übersichtlicher Weise, ohne explizite Verwendung der Gruppentheorie, untersucht und im besonderen die Möglichkeiten für das Auftreten eines linearen Zeeman-Effektes diskutiert. So zeigt sich im besonderen bei nichtkubischen Kristallen im Fall „Magnetfeld parallel zur Hauptachse“ stets, im Fall „Magnetfeld senkrecht zur Hauptachse“ in bestimmten Kristallklassen ein linearer Zeeman-Effekt. *F. Sauter* (Göttingen).

Raines, S.: The cohesive energy of metallic magnesium. *Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys.*, London, VII. S. 41, 568—582 (1950).

Zur Berechnung der Wellenfunktionen wird die Zellenmethode nach Wigner und Seitz benutzt, wobei die Zelle durch eine Kugel gleichen Volumens ersetzt und das Atomrumpffeld vom Hartree-Hyp angenommen wird. Es werden zwei self consistent-Felder im Metall betrachtet. Beim ersten wird angenommen, daß die Spinwechselwirkung die gleichzeitige Anwesenheit von Valenzelektronen ungleichen Spins in einer Zelle ausschließt, das Potential ist dann durch den Rumpf und die in der Zelle vorhandenen Elektronen mit gleichem Spin bedingt. Beim zweiten Feld wird jede Wechselwirkung zwischen den Elektronen vernachlässigt, das Potential ist dann durch den Rumpf und alle Valenzelektronen in der Zelle bestimmt. Die Endergebnisse sind für beide Felder nur wenig voneinander verschieden, jedoch ist die Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen beim ersten Feld besser als beim zweiten, weshalb der Gang der Rechnung für dieses angegeben wird. Die gesamte Bindungsenergie erscheint als Summe folgender Beiträge: Eigenwert ε_0 des tiefsten Zustandes, Fermienergie ε_F , Austauschenergie ε_A und Korrelationsenergie ε_C zwischen den Elektronen mit verschiedenem Spin. Zur Berechnung von ε_A und ε_C wird die Näherung freier Elektronen benutzt, zur Berechnung von ε_F die effektive Masse nach Bardeen berücksichtigt. Die Berechnung von ε_0 für ein freies Atom erfolgt nach einem self consistent-Verfahren. Die berechneten Werte der Gitterkonstanten $a = 2,00 \text{ \AA}$, der Gitterenergie $\varepsilon = 43000 \text{ cal/Mol}$ und der Kompressibilität $\kappa = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kp}$ stimmen befriedigend mit den gemessenen Werten $a = 1,77 \text{ \AA}$, $\varepsilon = 38000 \text{ cal/Mol}$ und $\kappa = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kp}$ überein. Der Einfluß der gemachten Näherungen (freie Elektronen, Vernachlässigung der Wechselwirkung zwischen Valenz- und Rumpfelektronen, Kugelgestalt der Zellen) wird diskutiert. *A. Kochendörfer* (Stuttgart).

Laškarev, V. A.: Diffusion von Stromträgern in Halbleitern mit gemischter Leitfähigkeit. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 73, 929—932 (1950) [Russisch].

Shockley, W.: Energy band structures in semiconductors. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 78, 173—174 (1950).

Ganz kurze Andeutung von Verfahren, bei kubischen Kristallen die Abhängigkeit der Elektronenenergie vom Wellenzahlvektor durch wenige Parameter darzustellen, die vielleicht durch Vergleich mit experimentell meßbaren Größen bestimmt werden können.

F. Hund (Jena).

Piontelli, R.: Aspetti della fisico chimica dei metalli. Rend. Sem. mat. fis., Milano 19, 118—145 (1949).

London, F.: On the problem of the molecular theory of superconductivity. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 562—573 (1948).

Skizze einer Elektronentheorie der Supraleitung, die sich mit der Heisenbergschen Theorie kritisch auseinanderzusetzen versucht. Während nach Heisenberg die Supraleitung als ein Kondensationsphänomen der Elektronen im Ortsraum angesehen wird, hervorgerufen durch ihre gegenseitige Coulombsche Abstoßungskraft, nimmt hier der Verf. eine Art Kondensation im Impulsraum an, welche für die Supraleitung verantwortlich gemacht wird.

W. Macke (Göttingen).

Höhler, G.: Ferromagnetismus als Einstein-Kondensation der Blochschen Spinwellen. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 7, 93—96 (1950).

Es wird auf eine bemerkenswerte Analogie hingewiesen zwischen der Einstein-kondensation eines der Bosestatistik genügenden Gases und der Blochschen Spinwellenbetrachtung beim Ferromagnetismus im Fall sehr kleiner äußerer Magnetfelder. Und zwar gilt für die Verteilung der Gasatome auf die angeregten Zustände genau die gleiche Verteilungsformel wie nach Bloch für die Besetzung der einzelnen Zustände eines Energiebandes für die Spinwellen mit Linksspins (wenigstens im unteren Teil des Bandes). In beiden Fällen ist daher auch die Zahl der besetzten Zustände proportional $T^{3/2}$. Auf Grund dieser Analogie ist es naheliegend, Rechnungen von Osborne und Mitarbeitern [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 396—399 (1949)] über das Verhalten dünner Helium-II-Filme auf den Fall dünner ferromagnetischer Schichten zu übertragen. Demnach sollten nur unendlich ausgedehnte Flächengitter, wie sie Bloch betrachtet, nicht ferromagnetisch sein, während endlich große Flächengitter auch einen im endlichen gelegenen Curie-Punkt haben sollten. Freilich wäre dann der Ferromagnetismus solcher Gebilde wesentlich strukturempfindlich.

Sauter (Göttingen).

Lévy, Maurice: L'anisotropie moléculaire du pouvoir rotatoire naturel: Étude théorique et expérimentelle. Ann. Phys., Paris, XII. S. 5, 310—378 (1950).

Auf der Grundlage der Theorie von Oseen wird das Drehvermögen (bezüglich der Polarisationsenebene des Lichts) der cholesterischen Medien berechnet, ferner die Größe des inneren elektrischen Feldes, erzeugt durch die Nachbarmoleküle des jeweils betrachteten Moleküls. Endlich wird die Variation des natürlichen Drehvermögens berechnet, indem man die gleichzeitige Wirkung des magnetischen und des inneren elektrischen Feldes berücksichtigt. Die so erhaltenen theoretischen Formeln geben die experimentellen Resultate sehr befriedigend wieder. Für das Sulfat von Nickel-Hexahydrat wurde als Ausgangspunkt der Theorie die Verlagerung der $3f$ -Niveaus des Nickelatoms durch das elektrische Feld genommen. Unter Berücksichtigung des Einflusses des magnetischen Feldes wird bei der Variation des natürlichen Drehvermögens der Anteil des kristallinen Feldes berechnet. Weiter wird gezeigt, wie man die Wirkung des elektrischen Feldes auf das Drehvermögen des Seignettesalzes interpretieren kann. Die Arbeit, die als dritter Teil einer umfangreichen Untersuchung geschrieben ist [Teil 1 und 2 in Ann. Phys., Paris, XII. S. 5, 153—256 (1950)], stellt eine theoretische Diskussion der in den beiden vorhergehenden Teilen besprochenen experimentellen Resultate dar.

Picht (Potsdam).

Kernphysik.

Schouten, J. A.: On meson fields and conformal transformations. Rev. modern Phys., New York **21**, 421—424 (1949).

Verf. nennt verschiedene Gesichtspunkte, die auf die Notwendigkeit einer konforminvarianten Behandlung einer allgemeinen Feldtheorie (in 6 homogenen van Dantzig-Koordinaten) hinweisen: Außer der bekannten Konforminvarianz der Maxwell'schen Gleichungen, ist die Geometrie des Spinraumes im wesentlichen konforminvariant und läßt sich 6-dimensional behandeln. Das Mesonfeld zeigt verschiedene konforminvariante Züge, und die 6-dimensionale Geometrie konformer Übertragungen bietet Raum genug an zum Einbau von Mesonfeldgrößen. *Stellmacher*.

Sachs, R. G.: Interpretation of the triton moment. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **72**, 312—320 (1947).

Verde, Mario: Urto neutroni-deutoni alle basse energie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. **8**, 228—232 (1950).

Zilsel, P. R., B. T. Darling and G. Breit: The scattering of slow neutrons by bound protons. III: Intermediate energies. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **72**, 576—580 (1947).

Bothe, W.: Zur Theorie der Bremsung von Neutronen. Z. Phys., Berlin **125**, 210—224 (1948).

Das Problem der räumlichen Verteilung abgebremster Neutronen wird in stark spezialisierter Form angegangen. Voraussetzungen sind die Konstanz der freien Weglänge während des Bremsvorganges und die Unabhängigkeit von Energieverlust und Streuwinkel beim Einzelprozeß. Die Ergebnisse sind, soweit sie die Bremslänge betreffen, als Grenzfälle im nachstehenden Referat enthalten. Außerdem werden für diesen einfacheren Fall Angaben über den Energieverlust nach einer gegebenen Anzahl von Stößen gemacht, wobei der Schwerpunkt darauf liegt, daß die Masse des bremsenden Atoms mit derjenigen des Neutrons nicht übereinstimmt. *Flügge*.

Bothe, W.: Die strenge Berechnung von Neutronen-Bremslängen. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. **3**, 52—61 (1948).

Es handelt sich um einen Beitrag zu folgendem Problem: Von einer punktförmigen Quelle gehen allseitig schnelle Neutronen aus, die durch elastische Stöße an den Atomen des umgebenden Mediums Impulsverluste erleiden und allmählich auf eine sehr viel kleinere Energie abgebremst werden. Gefragt wird nach der mittleren Entfernung eines Neutrons bestimmter Energie von der Quelle („Bremslänge“). Die exakte Lösung des Problems ist bisher an zwei Schwierigkeiten gescheitert: die freie Weglänge von Stoß zu Stoß hängt u. U. stark von der jeweiligen Energie ab (besonders stark bei Wasserstoff), und die Richtungsverteilung nach einem Stoß ist funktional gekoppelt mit der Energieverteilung. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, der zweiten Schwierigkeit Herr zu werden, während die erste durch die Voraussetzung konstanter freier Weglänge umgangen wird. Für die komplizierten Ausdrücke, die sich ergeben, werden Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen angegeben. Besonders hervorgehoben sind der Fall geringer Bremsung („Anfangswert der Bremslänge“) und der Fall sehr starker Bremsung, in dem eine einfache Formel gefunden wird. Der Einfluß der Kopplung von Streuwinkel und Energieverlust kann die Bremslänge vergrößern oder verkleinern: der Einfluß ist um so kleiner, je stärker die Bremsung ist. Die für beliebige Massen abgeleiteten Formeln vereinfachen sich für Wasserstoff. *Flügge* (Marburg).

Burhop, E. H. S. and H. S. W. Massey: The capture of neutrons by deuterons. Proc. R. Soc., London A **192**, 156—166 (1948).

Sneddon, I. N. and B. F. Tousehek: A note on the calculation of the spacing of energy levels in a heavy nucleus. Proc. Cambridge phil. Soc. **44**, 391—403 (1948).

Preston, Melvin A.: The theory of alpha-radioactivity. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **71**, 865—877 (1947).

Dänzer, H.: Zur Deutung des Absorptionsgesetzes der β -Strahlen. Z. Phys., Berlin 128, 79—103 (1950).

Die vom Verf. entwickelten Methoden zur Behandlung der Diffusion und Bremsung von Neutronen werden auf β -Strahlen übertragen. Es zeigt sich dabei, daß die exponentielle Form des Absorptionsgesetzes ohne Berücksichtigung der Bremsung nicht zu verstehen ist. Für die Diffusion tritt bei Elektronen an Stelle der freien Weglänge $\lambda = 1/N\sigma$ die Größe $R = 2\lambda/\vartheta^2$, wo ϑ^2 das — als klein angenommene — mittlere Ablenkungswinkelquadrat bei Einzelstreuung ist. R kann als „Ersatzweglänge“ definiert werden. Der Diffusionskoeffizient kann dann in der klassischen Form $D = \frac{1}{3} R \cdot v$ (v = Geschwindigkeit) verwendet werden, er verkleinert sich aber im Lauf des Diffusionsprozesses, was bisher nicht berücksichtigt worden ist. Aus der zur Primärenergie gehörigen Reichweite R_0 ergibt sich die Reichweite für den exponentiellen Abfall der Ionisationswirkung $B = \sqrt{2} \cdot R_0$. Die Ergebnisse werden mit experimentellen Kurven verglichen und bestätigt. *Volz.*

Jánosy, L.: Note on the fluctuation problem of cascades. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 63, 241—249 (1950).

Es werden Diffusionsgleichungen für die Schwankungen von Nukleon-Kaskaden (Heitler und Jánosy, dies. Zbl. 35, 280) sowie von Elektron-Photonkaskaden aufgestellt. Diese Diffusionsgleichungen sind Integro-Differentialgleichungen, die durch numerische Integration gelöst werden können. *Oehme* (Göttingen).

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

• **Voronev-Vel'jaminov, B. A.:** Gasnebel und neue Sterne. Moskau, Lenin-grad: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1948.

Schatzmann, E.: Les réactions nucléaires aux grandes densités. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 867—869 (1947).

Qvist, Bertil: On the integration of stellar models in radiative equilibrium. Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 15, Nr. 8, 139 S. (1950).

Die Arbeit betrifft die mathematische Diskussion von radialsymmetrischen Sternmodellen, welche charakterisiert sind durch ausschließlich Strahlungstransport der Energie, die Oberflächenbedingung P (Druck) = 0, T (Temperatur) = 0 sowie längs des Radius konstantes mittleres Molekulargewicht. Für die Energieerzeugung ε [erg/gr sek] und die Opazität κ [gr⁻¹ cm²] werden Gesetze der allgemeinen Form $\varepsilon = \varepsilon_0 \rho^k T^n$ und $\kappa = \kappa_0 \rho^p T^{-q}$ angenommen, speziell $\varepsilon = \varepsilon_0$ und in Anlehnung an Bethe $\varepsilon = \varepsilon_0 \rho^2 T^{18}$ mit $\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$ nach Kramers. *Biermann.*

Anderson, Oskar: Zum Problem des „Wärmeflusses“. Mitteil.-Bl. math. Statistik, München 1, 131—139 (1949).

Bemerkungen zu der „Geschichte der Natur“ des Ref. Es wird zur Vorsicht gemahnt gegenüber der Anwendung thermodynamischer statistischer Begriffe auf die kosmische Entwicklung. Die Möglichkeit einer empirischen Revision des Gesetzes der großen Zahlen wird erwogen. Der Schluß der Arbeit erörtert den „Wiederkehr-Einwand“ gegen die statistische Deutung des 2. Hauptsatzes.

C. F. Weizsäcker (Göttingen).

Lauscher, Friedrich: Zur Strahlungstheorie der Hydrosphäre. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., IIa 155, 281—308 (1947).

Beim Durchgang des Lichtes durch reines Wasser spielt im Wellenlängenbereich $0,3 \mu < \lambda < 0,6 \mu$ die Streuung eine entscheidende Rolle. Sie entsteht durch Dichteschwankungen, die die thermische Molekularbewegung mit sich bringt (Fluktuationstheorie). Diese Streuung verläuft nach ganz analogen Gesetzen wie die Rayleighsche Streuung, nur die Zahlenwerte sind anders. Für einen Punkt in der Tiefe z unter der Wasseroberfläche wird die räumliche Herkunft der primären

Streustrahlung berechnet. Dabei ergibt sich unter anderem, daß die Strahlungsstärke der primären Streustrahlung aus jeder Richtung proportional dem Verhältnis zwischen dem Streukoeffizienten und dem Extinktionskoeffizienten ist. Das primäre Unterlicht hängt in derselben Weise von z ab wie die direkt einfallende Sonnenstrahlung. Durch elementare Integrationen gelingt es, eine Formel für die Abhängigkeit des gesamten Unterlichtes von der Zenitdistanz der Sonne anzugeben. Da aus den Formeln folgt, daß das Streuoberlicht in den obersten Schichten sehr schwach gegen das Streuunterlicht ist, so kann dieses gegen jenes vernachlässigt werden. Unter dieser Annahme gibt der Verf. eine Berechnung des gesamten sekundären Unterlichtes. Merkwürdigerweise ist dieses nicht stärker diffus als das primäre, sondern bevorzugt mehr die horizontale Richtung. Zum Schluß werden die Ergebnisse verglichen mit älteren Berechnungen Whitneys, der eine allseitig gleichmäßige Verteilung des Streulichtes annahm. *W. Kertz (Göttingen).*

Stokman, B. S.: Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit und der Dichteverteilung im Querschnitt eines unendlichen Kanals in Abhängigkeit von der Wirkung des Windes und der seitlichen Reibung im Feld der Corioliskraft. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **71**, 41—44 (1950) [Russisch].

L'A. a formé le système d'équations, reliant les composantes du courant résultant (dans une mer barocline) aux polaires des masses et du vent [cf. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **59**, 675—678, 889—892 (1948)]. Ces relations sont appliquées ici à l'étude du régime stationnaire dans un canal prismatique indéfini (problème des détroits) sous l'action du vent dont la direction coïncide avec l'axe du canal mais dont la vitesse varie dans une section transversale. Moyennant des approximations convenables, l'A. parvient à donner la répartition des vitesses et des densités dans une section droite du canal. — Une discussion numérique termine ce travail (cas où la pression du vent est constante). *J. Kravtchenko (Grenoble).*

Burkard, Otto: Schichtbildung in der höheren Ionosphäre. S. B. Akad. Wiss. Wien, math. naturw. Kl., IIa **155**, 189—203 (1947).

Schon vor rund zwanzig Jahren (1931) hat Chapman eine Theorie der Schichtbildung in der Ionosphäre entwickelt, die sehr einfach und physikalisch plausibel verständlich macht, wie überhaupt eine Konzentration der Ionisation vorwiegend in einer bestimmten Höhe zustande kommen kann. Bahr hat einige Jahre später (1938) diese Theorie ergänzt durch die Zusatzannahme, daß in großen Höhen, beginnend bei etwa 100 km, atomarer Sauerstoff durch eine Photodissoziation entsteht; dieser wird dann durch Absorption weiterer Sonnenstrahlung ionisiert, wodurch die F -Schicht entsteht. An diese Vorstellung anknüpfend und unter Bezugnahme auf eine Untersuchung von Dütsch (Diss. Zürich 1946) über die Sauerstoffumsetzungen in der Ozonschicht wird der Chapmansche Ansatz in der vorliegenden Arbeit erweitert und versucht, eine bessere Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung als bisher zu erzielen. An Stelle des einfachen Ansatzes $q = q_0 e^{-h/\kappa}$ für die Abnahme der Gasdichte mit der Höhe wird der Ansatz $q = q_0 \cdot (\kappa_0/\kappa) \cdot e^{-h/\kappa - \gamma e^{-h/\kappa}}$ — gerade in dieser Form aus Gründen der mathematischen Zweckmäßigkeit — benutzt. Die Durchführung der anschließenden Rechnungen ist elementar und mathematisch ohne besonderes Interesse. Aus der Zahl der erzeugten Elektronen ($\text{cm}^{-3} \text{sec}^{-1}$) wird die Elektronenkonzentration im stationären Zustand (cm^{-3}) nach dem einfachen quadratischen Rekombinationsgesetz berechnet und zeigt bei geeigneter Wahl einer eingehenden Konstanten für ihren Maximalwert eine Abhängigkeit von der Sonnenzenithdistanz, die in gutem Einklang mit den Beobachtungen steht. Verständlich wird nun auch der experimentelle Befund, daß die Ionisierung in der F_2 -Schicht schon vor dem Sonnenaufgang am Erdboden anzusteigen beginnt. *R. Seeliger (Greifswald).*

Reuter, Heinz: Zur Theorie der nächtlichen Abkühlung der bodennahen Schicht und Ausbildung der Bodeninversion. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., IIa **155**, 333—358 (1949).

Die Theorie der nächtlichen Abkühlung der bodennahen Schicht, die ein wichtiger Posten auf der Debetseite des atmosphärischen Energiehaushalts ist, gehört zu den Grundproblemen der theoretischen Meteorologie. Sie hat zu den bisher besten Anschlüssen an die Wirklichkeit geführt. Klimaforschung und Gartenbau, dieser besonders wegen der Schadenbekämpfung bei Spät- und Frühfrösten, sind

an diesem Problem interessiert. Seine Fortführung über das bisher Erreichte durch die vorliegende Studie des Verf. wird deshalb allgemein begrüßt werden. Verf. gliedert den Stoff in drei Abschnitte: Aufstellung der die nächtliche Abkühlung der bodennahen Schicht beschreibenden Differentialgleichung, Auffinden ihrer Lösung und deren Diskussion. — Zunächst wird die Differentialgleichung der vertikalen Wärmebewegung im Boden mit den dazugehörigen Nebenbedingungen aufgestellt, dann die Verhältnisse der über dem Erdboden liegenden und diesen an der Oberfläche berührenden Atmosphäre unter Berücksichtigung des Austausches betrachtet. Anschließend wird aus dem 1. Hauptsatz der Wärmetheorie durch Vernachlässigung der Eigenstrahlung der Luft eine für die vertikale Wärmebewegung in der bodennahen Luftschicht gültige, mit der ersten formal übereinstimmende Differentialgleichung gefolgert. — Bei der Lösung geht Verf. im Gegensatz zu seinen Vorgängern D. Brunt und H. Philipps von einer beliebigen Anfangstemperaturverteilung aus, wodurch ihm, wie der Verlauf der Rechnung zeigt, die Berechnung der Höhe und des Betrages der Bodeninversion gelingt. Auf Grund der klassischen Methoden der Wärmeleitung wird zunächst, unter Benutzung der Erfahrung, daß die effektive Ausstrahlung R bei wolkenlosem Himmel oder bei unveränderten Bewölkungsverhältnissen mit hinreichender Genauigkeit für die Nacht als konstant anzusehen ist, eine Eigenschaft der vertikalen Temperaturverteilung abgeleitet. Verf. arbeitet dann gemäß seiner beiden Differentialgleichungen mit zwei Medien, die durch verschiedene Materialkonstanten gekennzeichnet sind, und bedient sich eines Verfahrens, das in der Theorie der Wärmeleitung unter den Namen „Berührung zweier heterogener Körper“ bekannt ist. Er kommt zu zwei bemerkenswerten Ergebnissen: 1. Zur expliziten Darstellung der Temperatur im Erdboden und in der bodennahen Luftschicht in Abhängigkeit von der Erdoberfläche und der fortschreitenden Nachtstunde und 2. zur Angabe des zeitlichen Verlaufes der Abkühlung der Oberfläche des Bodens. Diese sei hier hingeschrieben, da sie den Vorzug gegenüber früheren Ableitungen erkennen läßt, $\Delta T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(R + \gamma c_p A)}{\sqrt{k_B \varrho_B c_B + c_p} \sqrt{A \varrho}} \cdot \sqrt{t}$, k_B Wärmeleitfähigkeit, ϱ_B Dichte und c_B spezifische Wärme des Bodens, c_p spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck, γ der vertikale Temperaturgradient der bodennahen Luftschicht, ϱ ihre Dichte, A der Austauschkoefizient. — Die Diskussion dieser Gleichung für die verschiedenen Werte der Konstanten gibt ein anschauliches Bild ihres Einflusses auf die Abkühlung der bodennahen Schicht. Auf Grund des ersten Ergebnisses berechnet Verf. zum Schluß die Stärke und Höhe der Inversion, womit er erstmalig dieses Problem analytisch bewältigt hat. — Die theoretische Meteorologie steht z. Z. noch in wichtigen Teilen abseits vom Lehrgebäude der theoretischen Physik. Die Studie des Verf. ist als eine Arbeit zur Überbrückung dieser Kluft zu werten.

B. Neis (Berlin).

Ertel, Hans: Eine Methode zur approximativen Vorausberechnung von Luftmassenverlagerungen. S.-B. Deutschen Akad. Wiss. Berlin, Math.-naturw. Kl. 1948, Nr. III, 23 S. (1948).

Verf. behandelt eine Aufgabe, die rein mathematisch dahin formuliert werden kann, daß aus dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (u, v)$, d. h. aus der infinitesimalen Transformation $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, 1 [mit dem Lieschen Symbol $D = \partial/\partial t + u(\partial/\partial x) + v(\partial/\partial y)$] einer eingliedrigen Gruppe von Transformationen im x, y, t -Raum diese selbst approximativ, d. h. bis zu den Gliedern zweiten Grades im kanonischen Parameter $\tau = t$ ermittelt werden sollen. Die vom Verf. angegebene Formel

$$(16) \quad \mathbf{r} = 2\tau \cdot \mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}} - \tfrac{1}{2}\tau, 0), \quad \begin{array}{l} \bar{\mathbf{r}} = (X, Y) \text{ Endkoordinaten} \\ \mathbf{r} = (X - a, Y - b) \text{ Displazierungsvektor} \end{array}$$

(bei deren expliziter Ausschreibung in Gl. (17) und der auf Gl. (18) folgenden Determinante bei den Ableitungen $\partial v_i / \partial x_k$ der Faktor $\frac{1}{2}$ fehlt) kann, wie Ref. bemerken

möchte, auch aus der symbolischen Darstellung der endlichen Transformationen (der Endkoordinaten in die Anfangskoordinaten (a, b))

$$a = e^{-2\tau D} x = X - 2\tau u + \frac{1}{2} (2\tau)^2 Du + \dots \\ = X - 2\tau (u - \tau (\partial u / \partial t)) + \frac{1}{2} (2\tau)^2 (D - \partial / \partial t) u + \dots$$

entnommen werden. Dieselben Glieder zweiten Grades gibt die vom Verf. im Abschn. III durch sukzessive Approximationen, in IV auch graphisch gelöste Gl. (16). (Beim Konvergenzbeweis kann man freilich nicht mit einer abgebrochenen Taylor-Entwicklung in der auf (26) folgenden Gleichung arbeiten.) — Praktisch von Bedeutung ist die obere Schranke

$$\tau_m(X, Y) = \left[\sum_{i=1}^2 |\text{grad } v_i|^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (v_i) = (u, v),$$

für die Dauer des Prognosen-Intervalls $(-\tau, \tau)$ (in dem die sukzessiven Näherungen der ersten Approximation konvergieren), ausgedrückt in der Inhomogenität des Strömungsfeldes zur mittleren Zeit $t = 0$. — Die Berechnung der Displazierungsvektoren r zu einem Zielpunkt X, Y für eine Folge von Zeitmomenten bleibt im Rahmen der mit dem Ausgangsgeschwindigkeitsfeld auskommenden ersten Näherung, versucht also nicht die Abweichung von der exakten Lösung zu beurteilen. — Der V. Abschn. führt geographische Koordinaten ein. — Es ist bemerkenswert, daß die Meteorologie zur Vorausberechnung von Luftmassenverlagerungen sich mit rein kinematischen Daten begnügt und nicht die dynamischen Gesetze heranzieht.

E. Hölder (Leipzig).

Davies, D. R.: A note on three-dimensional turbulence and evaporation in the lower atmosphere. Proc. R. Soc., London, A 202, 96—103 (1950).

Verf. hat das Verdienst, das Problem der dreidimensionalen Turbulenz in seiner Verbindung mit der Verdunstung erstmalig einer dynamischen Behandlung zugänglich gemacht zu haben. Seine diesbezügliche Studie aus dem Jahre 1947 ist in diesem Zbl. 31, 96 besprochen worden. — Über die mathematischen Schwierigkeiten der dreidimensionalen Turbulenz schreibt D. Brunt in seiner *Physical and Dynamical Meteorology* 1939: Zahlreiche Bearbeiter dieses Gegenstandes sind von der Ähnlichkeit zwischen der turbulenten und molekularen Zähigkeit ausgegangen. Dies ist zwar für zweidimensionale, aber nicht für dreidimensionale Bewegungen zulässig. Es gibt keine mathematische Theorie der Turbulenz in drei Dimensionen, welche auf die Atmosphäre anwendbar ist... und Taylors Gleichungen für den Wirbeltransport in drei Dimensionen sind so verwickelt, daß aus diesem Umstand die Unmöglichkeit einer dynamischen Lösung dieses atmosphärischen Problems gefolgert werden muß. — Dem Scharfsinn und der Unermüdbarkeit britischer Meteorologen ist es aber im folgenden Jahrzehnt doch gelungen, hier ein Stück weiterzukommen. Ein sehr wichtiger Meilenstein auf diesem Wege ist die Studie von K. L. Calder aus dem Jahre 1949 über die turbulente Diffusion und Verdunstung beim stationären Strömen der Luft über aerodynamisch glatte und rauhe Oberflächen (dies. Zbl. 33, 414), in der die allgemeine Diffusionsgleichung auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt ist und die Konzentration als Funktion der Höhe über der Verdunstungsfläche und des vom Luftstrom über dieser zurückgelegten Weges erscheint. Die zur Stromrichtung senkrechte Erstreckung der Verdunstungsfläche wurde unbegrenzt angenommen. — An diese Gedankenführung knüpft Verf. in seiner jetzigen Arbeit an. Er gibt aber dem Verdunstungsgebiet die Form einer Parabel, deren Achse in der Stromrichtung liegt und führt den Begriff eines Koeffizienten für die seitliche Turbulenz (lateral diffusivity) ein; diesen bestimmt er in seiner Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit und der Höhe über der Grundfläche durch Potenzen dieser Koordinaten. Das Potenzgesetz stimmt formal mit dem von Calder gewählten überein. — Die Lösung der so modifizierten Differentialgleichung für die Konzentration wird hingeschrieben. Der Zähler besteht aus einer Reihe unvollständiger, der Nenner aus einer Reihe vollständiger Γ -Funktionen. Dieser Ausdruck wird mit dem von Calder abgeleiteten verglichen. Für die Punkte auf der Achse ergibt sich völlige Gleichheit, die Abweichungen wachsen mit der seitlichen Entfernung von der Achse. Die Messungen ergaben eine weitgehende Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung. In einer anderen Arbeit, ebenfalls aus dem Jahre 1950, hat Verf. die rechteckige Form des Verdunstungsgebietes behandelt, andere Anpassungen der Theorie an die Wirklichkeit sind in Vorbereitung.

B. Neis (Berlin).

● **Wilkes, M. V.:** Oscillations of the earth's atmosphere. New York: Cambridge University Press 1949. IX, 76 p.; \$ 2.50.